EGZAMIN LICENCJACKI
NA KIERUNKU MATEMATYKA
ROK AKADEMICKI 2016/2017

1. Analiza matematyczna

1. Zdefiniuj pojęcia kresów podzbiorów zbioru liczb rzeczywistych.

2. Omów pojęcie granicy ciągu liczb rzeczywistych oraz granic dolnej i górnej dowolnego ciągu liczb rzeczywistych. Podaj definicję liczby e. Sformułuj warunek Cauchy'ego dla ciągów liczb rzeczywistych.

3. Podaj definicję szeregu liczbowego. Udowodnij rozbieżność szeregu harmonicznego. Sformułuj następujące kryteria zbieżności szeregów liczb rzeczywistych: kryterium porównawcze, d'Alemberta, Cauchy'ego, Leibniza.

4. Podaj definicję funkcji, operacji złożenia funkcji, funkcji odwrotnej.

5. Podaj definicję granicy funkcji, granic niewłaściwych. Omów pojęcie asymptoty wykresu danej funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej.

6. Podaj definicję ciągłości funkcji w punkcie, funkcji ciągłej oraz funkcji jednostajnie ciągłej. Wymień podstawowe własności funkcji ciągłych - twierdzenia Weierstrassa, Cantora - Heinego i Darboux.

7. Podaj definicję pochodnej funkcji. Omów podstawowe własności operacji różniczkowania.

8. Sformułuj klasyczne twierdzenia rachunku różniczkowego: lemat Fermata, twierdzenia Lagrange'a, Cauchy'ego, Taylora, de l'Hospitala.

9. Omów wybrane zastosowania rachunku różniczkowego takie jak: monotoniczność, ekstrema lokalne, wypukłość, punkty przegięcia wykresu funkcji, prosta styczna, kąt przecięcia krzywych.

10. Omów pojęcie całki nieoznaczonej; sformułuj twierdzenie o całkowaniu przez części i całkowaniu przez podstawienie.

11. Podaj podstawowe własności całki nieoznaczonej. Omów wybrane metody całkowania funkcji wymiernych, trygonometrycznych, wyrażeń niewymiernych.

12. Podaj definicję całki Riemanna funkcji rzeczywistej określonej na przedziale zwartym. Sformułuj twierdzenie Newtona - Leibniza. Podaj podstawowe warunki konieczne całkowalności w sensie Riemanna. Sformułuj warunki konieczne i dostateczne całkowalności w sensie Riemanna - na przykład dla funkcji ograniczonej.

13. Omów podstawowe zastosowania całki Riemanna (funkcji rzeczywistej określonej na przedziale zwartym) w geometrii i mechanice.

14. Omów pojęcie całki niewłaściwej. Sformułuj podstawowe kryteria zbieżności całek niewłaściwych oraz kryterium całkowe zbieżności szeregów.

15. Sformułuj pojęcie zbieżności punktowej i zbieżności jednostajnej ciągów i szeregów funkcyjnych. Podaj twierdzenia o różniczkowaniu i całkowaniu szeregu funkcyjnego wyraz po wyrazie.

16. Podaj definicję szeregu potęgowego oraz funkcji analitycznej zmiennej rzeczywistej. Omów podstawowe własności szeregów potęgowych - w tym twierdzenie Abela.

17. Omów pojęcie przestrzeni metrycznej, podaj wybrane przykłady takich przestrzeni. Podaj definicje przestrzeni metrycznej zwartej oraz przestrzeni metrycznej spójnej. Omów pojęcie odwzorowania ciągłego w przestrzeniach metrycznych.

18. Podaj definicję pochodnej kierunkowej, pochodnych cząstkowych i różniczkowalności funkcji wielu zmiennych rzeczywistych. Omów związki pomiędzy tymi pochodnymi. Sformułuj twierdzenie Schwarza.

19. Omów pojęcie ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych rzeczywistych. Podaj warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego oraz wybrane warunki dostateczne istnienia ekstremum lokalnego.

20. Omów pojęcie ekstremów globalnych funkcji rzeczywistej określonej na zbiorze zwartym w przestrzeni R^n. Omów ekstrema warunkowe funkcji wielu zmiennych rzeczywistych; opisz zasadę mnożników Lagrange'a.

21. Sformułuj pojęcie funkcji uwikłanej i podaj kryterium istnienia funkcji uwikłanej.

22. Omów całki wielokrotne. Sformułuj twierdzenie Fubiniego dla całki Riemanna.

23. Omów zamianę zmiennych w całce wielokrotnej. Podaj podstawowe przykłady współrzędnych krzywoliniowych.

24. Omów pojęcia całek krzywoliniowych i powierzchniowych. Sformułuj twierdzenia Greena, Gaussa-Ostrogradskiego, Stokesa.

25. Podaj przykłady zastosowania całek wielokrotnych, krzywoliniowych i powierzchniowych w geometrii i mechanice.

26. Podaj podstawowe pojęcia na temat szeregów trygonometrycznych. Sformułuj wybrane kryteria (w tym warunki Dirichleta) o rozwijalności funkcji okresowej w trygonometryczny szereg Fouriera.

27. Podaj podstawowe fakty na temat równań różniczkowych zwyczajnych. Omów metodę rozwiązywania wybranych równań różniczkowych zwyczajnych, w tym równań liniowych n-tego rzędu o stałych współczynnikach.

2. Algebra

1. Podaj definicje działań modulo n. Omów algebraiczne własności tych działań.
2. Omów algorytm Euklidesa i jego zastosowania.
3. Sformułuj Małe Twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera.
4. Podaj definicję permutacji, omów metody zapisu permutacji i działania na permutacjach.
5. Podaj definicję grupy, podgrupy i przykłady.
6. Sformułuj twierdzenie Lagrange'a o podgrupach.
7. Podaj definicję pierścienia, podpierścienia i przykłady.
8. Podaj definicję ciała i przykłady ciał.
9. Podaj definicję wielomianu. Omów działania na wielomianach i ich własności.
10. Podaj definicję pierwiastka wielomianu oraz sformułuj twierdzenie Bézouta.
11. Podaj definicję wielomianu nierozkładalnego i sformułuj twierdzenie o rozkładzie wielomianów.

3. Algebra liniowa i geometria analityczna

1. Podaj definicję i sposoby zapisu liczb zespolonych.

2. Podaj zastosowania zapisu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.

3. Podaj definicje działań i ich podstawowe własności w pierścieniu macierzy kwadratowych ustalonego wymiaru nad dowolnym ciałem.

4. Przedstaw metody rozwiązywania liniowych układów równań.

5. Podaj różne definicje wyznacznika. Podaj przykładowe własności i zastosowania wyznacznika.

6. Podaj definicję i przykłady przestrzeni i podprzestrzeni liniowych.

7. Podaj definicję bazy i wymiaru przestrzeni liniowej. Przedstaw wybraną metodę wyznaczania bazy skończenie wymiarowej.

8. Podaj metodę konstrukcji reprezentacji macierzowej przekształcenia liniowego w przestrzeniach skończenie wymiarowych.

9. Podaj definicję przekształcenia liniowego oraz jądra i obrazu przekształcenia liniowego. Omów wybrany przykład.

10. Podaj definicję wartości własnych i wektorów własnych operatora liniowego. Omów wybrany przykład.

11. Podaj definicję macierzy Jordana i omów metodę znajdowania macierzy w postaci Jordana dla operatorów liniowych w przestrzeniach skończenie wymiarowych.

4. Rachunek prawdopodobieństwa

1. Podaj wzór na prawdopodobieństwo całkowite oraz wzór Bayesa.

2. Podaj aksjomatyczna definicję prawdopodobieństwa oraz definicję przestrzeni probabilistycznej.

3. Podaj definicję zmiennej losowej typu dyskretnego i przykład takiej zmiennej.

4. Podaj definicję zmiennej losowej typu ciągłego i przykład takiej zmiennej.

5. Zdefiniuj dystrybuantę zmiennej losowej i omów jej najważniejsze własności.

6. Scharakteryzuj jednowymiarowy normalny rozkład prawdopodobieństwa.

7. Podaj definicję dystrybuanty łącznej dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y) oraz dystrybuant brzegowych zmiennych X i Y. Jak można wykorzystać te pojęcia w badaniu niezależności zmiennych losowych X i Y ?

8. Podaj definicję dystrybuanty warunkowej i gęstości warunkowej zmiennej losowej X przy warunku Y=y.

9. Omów najważniejsze charakterystyki liczbowe zmiennej losowej i ich podstawowe własności.

10. Scharakteryzuj typy zbieżności ciągów zmiennych losowych.

11. Sformułuj słabe i mocne prawo wielkich liczb.

12. Podaj treść centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego i przykład jego praktycznego zastosowania.

13. Zdefiniuj funkcję charakterystyczną zmiennej losowej i omów jej podstawowe własności.

14. Zdefiniuj funkcję tworzącą zmiennej losowej typu dyskretnego i omów jej podstawowe własności.

5. Statystyka

1. Omów najważniejsze miary przeciętne (średnie) służące do opisu zbiorowości statystycznej.
2. Omów najważniejsze miary zróżnicowania (rozproszenia) służące do opisu zbiorowości statystycznej.
3. Zdefiniuj pojęcie nieobciążoności i zgodności estymatora.
4. Omów metodę największej wiarygodności wyznaczania estymatora nieznanego parametru rozkładu na podstawie próby losowej prostej pochodzącej z tego rozkładu.
5. Podaj nierówność Rao-Cramera dla estymatorów i wyjaśnij jej sens.
6. Na wybranym przykładzie omów pojęcie przedziału ufności.
7. Scharakteryzuj integralne elementy testu statystycznego: hipoteza zerowa, hipoteza alternatywna, statystyka testowa i zbiór krytyczny.
8. Zdefiniuj błąd pierwszego i drugiego rodzaju w teście statystycznym. Co to jest moc testu?
9. Na wybranym przykładzie omów parametryczny test istotności.
10. Scharakteryzuj najważniejsze nieparametryczne testy zgodności rozkładu: test chi-kwadrat Pearsona oraz test Kołmogorowa.
11. Zdefiniuj współczynnik korelacji liniowej Pearsona dla dwuwymiarowej próby losowej i scharakteryzuj jego własności.
12. Omów sposób wyznaczania parametrów prostej regresji cechy Y względem cechy X za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Jak można ocenić dopasowanie prostej regresji do empirycznych danych?

6. Matematyka dyskretna

1. Podaj definicję funkcji rekurencyjnej. Omów obliczanie wartości funkcji rekurencyjnej.
2. Podaj definicję kraty. Sformułuj podstawowe własności kraty.
3. Podaj definicję algebry Boole'a. Omów podstawowe własności algebry Boole'a.
4. Podaj definicję atomu i co-atomu algebry Boole'a. Podaj przykłady zastosowania tych pojęć.
5. Omów i zilustruj na przykładach różne sposoby zapisu funkcji boolowskiej.
6. Podaj definicję grafu nieskierowanego. Zilustruj to pojęcie na wybranych przykładach.
7. Podaj definicję macierzy sąsiedztwa i incydencji grafu. Zaprezentuj je na wybranych przykładach.
8. Podaj definicję grafu prostego. Zilustruj to pojęcie na podstawowych przykładach.
9. Sformułuj i omów podstawowe prawa kombinatoryki.

7. Wstęp do logiki i teorii mnogości

1. Omów zdania i spójniki logiczne. Czym są tautologie w rachunku zdań i jak je weryfikujemy?

2. Omów funkcje zdaniowe i kwantyfikatory. Sformułuj pojęcie prawa rachunku funkcyjnego.

3. Podaj definicje, przykłady oraz własności następujących pojęć: iniekcja, surjekcja oraz bijekcja.

4. Omów podstawowe działania na zbiorach oraz ich własności. Zdefiniuj i zilustruj na wybranych przykładach pojęcia sum i iloczynów uogólnionych.

5. Podaj definicję relacji równoważności. Omów oraz zilustruj na przykładzie pojęcie klasy abstrakcji względem danej relacji równoważności.

6. Omów pojęcie równoliczności zbiorów. Podaj definicje oraz przykłady zbiorów przeliczalnych oraz nieprzeliczalnych.

7. Sformułuj twierdzenie Cantora-Bernsteina. Podaj wybrane przykłady zastosowania tego twierdzenia.

8. Podaj definicję relacji częściowego porządku. Sformułuj lemat Kuratowskiego-Zorna.

9. Sformułuj zasadę indukcji matematycznej (inaczej, twierdzenie o indukcji matematycznej). Posługując się tym twierdzeniem udowodnij, że zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.

8. Matematyka obliczeniowa

1. Omów wybraną metodę przybliżonego rozwiązywania równań nieliniowych.
2. Sformułuj zagadnienie interpolacji oraz omów interpolację Lagrange'a.
3. Na czym polega zagadnienie aproksymacji? Omów aproksymację średniokwadratową dyskretną.
4. Na czym polega zagadnienie aproksymacji? Omów aproksymację średniokwadratową integralną.
5. Omów kwadratury Newtona-Cotesa.
6. Omów wybraną jednokrokową metodę przybliżonego rozwiązywania zagadnień początkowych.