EGZAMIN MAGISTERSKI
NA KIERUNKU MATEMATYKA
ROK AKADEMICKI 2016/2017

1. Logika i podstawy matematyki

1. Podaj definicję teorii formalnej i definicję dowodu formuły w takiej teorii.
2. Sformułuj twierdzenie o zwartości w teoriach formalnych.
3. Sformułuj twierdzenie Lindenbauma dla teorii formalnej.
4. Opisz klasyczny rachunek zdań jako teorię formalną.
5. Sformułuj twierdzenie o dedukcji dla klasycznego rachunku zdań.
6. Sformułuj twierdzenie o pełności dla klasycznego rachunku zdań.
7. Podaj definicję języka rzędu pierwszego i pojęcie modelu takiego języka.
8. Opisz definicję teorii rzędu pierwszego. Podaj przykłady takich teorii.
9. Zdefiniuj pojęcie modelu i pojęcie spełniania dla formuł teorii rzędu pierwszego.
10. Sformułuj twierdzenie Gödla o istnieniu modelu dla niesprzecznych teorii rzędu pierwszego.
11. Opisz aksjomatykę Zermelo-Fraenkela teorii zbiorów.
12. Podaj definicje liczb porządkowych i kardynalnych w aksjomatycznej teorii zbiorów.

2. Topologia

1. Podaj definicje przestrzeni metrycznej oraz kuli otwartej, zbioru otwartego i zbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej.

2. Podaj definicje przestrzeni topologicznej oraz zbioru otwartego i zbioru domkniętego w przestrzeni topologicznej.

3. Podaj definicje i własności operacji wnętrza i domknięcia zbiorów w przestrzeni topologicznej. Podaj przykłady.

4. Podaj definicje zbieżności ciągu w przestrzeni topologicznej i w przestrzeni metrycznej. Jaką moc może mieć zbiór granic ciągu w przestrzeni topologicznej i w przestrzeni metrycznej?

5. Sformułuj definicje punktu skupienia i punktu izolowanego zbioru w przestrzeni topologicznej. Podaj przykłady punktów skupienia i punktów izolowanych wybranego zbioru w przestrzeni topologicznej.

6. Sformułuj definicję bazy przestrzeni topologicznej. Podaj przykład przestrzeni topologicznej i jej bazy, która ma mniejszą moc niż moc całej topologii.

7. Zdefiniuj pierwszy i drugi aksjomat przeliczalności.

8. Podaj definicję i wymień podstawowe własności przestrzeni Hausdorffa.

9. Zdefiniuj przestrzeń ośrodkową i omów jej podstawowe własności. Podaj przykłady przestrzeni ośrodkowych i nieośrodkowych.

10. Podaj definicje przekształcenia ciągłego i homeomorfizmu przestrzeni topologicznych. Wymień kilka własności dziedziny zachowywanych przez przekształcenia ciągłe.

11. Podaj definicje i wymień kilka własności zwartej przestrzeni topologicznej i w szczególności przestrzeni metrycznej.

12. Sformułuj definicję spójności przestrzeni topologicznej. Podaj przykłady przestrzeni spójnych i niespójnych.

13. Podaj definicję przestrzeni metrycznej zupełnej. Sformułuj twierdzenie Baire'a.

3. Analiza matematyczna I

1. Podaj definicję i zastosowania całki krzywoliniowej niezorientowanej na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ i w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

2. Podaj definicję oraz własności całki krzywoliniowej zorientowanej w $\mathbb{R}^2$ i w $\mathbb{R}^3$.

3. Podaj wzór Greena i omów kilka jego zastosowań.

4. Podaj definicję i wybrane własności całki powierzchniowej niezorientowanej (I-go rodzaju).

5. Podaj definicję i wybrane własności całki powierzchniowej zorientowanej (II-go rodzaju). Co to jest strumień pola wektorowego i jaki jest jego związek z całką podwójną?

6. Omów twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego o związku między całką powierzchniową po zamkniętej powierzchni S_j a całką potrójną.

7. Co to jest potencjał pola wektorowego $\vec{F}$ i jak się go znajduje?

8. Podaj definicje i podstawowe własności rotacji, dywergencji i cyrkulacji pola wektorowego $\vec{F}$ w $\mathbb{R}^3$.

9. Omów twierdzenie Stokesa.

10. Sformułuj kryterium Dirichleta zbieżności szeregów zespolonych postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$. Omów jego zastosowanie do badania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ dla $|z| = 1$, $z \neq 1$.

11. Sformułuj definicję szeregu potęgowego i jego obszaru zbieżności. Omów twierdzenie o identyczności szeregów potęgowych.

12. Podaj definicję i własności funkcji holomorficznej. Omów równania Cauchy'ego-Riemanna.

13. Omów pojęcie funkcji harmonicznych dwóch zmiennych w kontekście ich związku z częścią rzeczywistą i urojoną funkcji holomorficznej.

14. Omów odwzorowania konforemne. Omów podstawowe własności odwzorowań homograficznych.

4. Analiza matematyczna II

1. Omów twierdzenie całkowe Cauchy'ego.

2. Podaj wzór całkowy Cauchy'ego.

3. Omów zasadę maksimum (lemat Schwarza) modułu funkcji analitycznej.

4. Omów szeregi Laurenta, ich obszary zbieżności i własności.

5. Przedstaw twierdzenie o residuach.

6. Podaj definicję i własności transformacji Laplace'a. Omów twierdzenie Borela o transformacie Laplace'a splotu oryginałów.

7. Omów zastosowanie przekształcenia Laplace'a do znajdowania rozwiązań równań różniczkowych liniowych i układów równań o stałych współczynnikach.

8. Podaj definicję i własności funkcji o wahaniu skończonym. Omów twierdzenie Jordana.

9. Podaj definicję i podstawowe własności modułu ciągłości $\omega(\sigma, f)$ ciągłej funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$. Omów jego zastosowanie do aproksymacji ciągłej funkcji $f(x)$ na przedziale $[a, b]$ wielomianami Bernsteina.

10. Podaj definicję zbiorów miary Lebesgue'a zero w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Uzasadnij, że tworzą one ideał podzbiorów w $\mathbb{R}^n$.

11. Omów pojęcie miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.

12. Podaj definicję i omów własności funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.

13. Podaj definicję całki Henstocka-Kurzweila na przedziale. Podaj kilka wybranych własności tej całki.

5. Algebra z zastosowaniami

1. Podaj definicję działania grupy na zbiorze. Podaj definicję stabilizatora i orbity elementu oraz zależności między nimi.
2. Zdefiniuj grupy symetrii figur płaskich i omów ich najważniejsze własności.
3. Podaj definicję oraz przykłady dziedziny całkowitości i ciała.
4. Opisz na wybranym przez siebie przykładzie konstrukcję pierścienia ułamków w dziedzinach całkowitości.
5. Opisz algorytm Euklidesa w pierścieniu wielomianów oraz omów na przykładzie jego zastosowanie.
6. Zdefiniuj ideał pierścienia i opisz konstrukcję pierścienia ilorazowego.
7. Omów wybrane własności ciał skończonych.
8. Opisz konstrukcję ciał skończonych o ustalonej liczbie elementów.
9. Podaj definicje oraz przykłady liczb algebraicznych i przestępnych.
10. Zdefiniuj i podaj przykłady liczb konstruowalnych geometrycznie.
11. Zdefiniuj pojęcie ciała algebraicznie domkniętego i podaj przykłady ciał algebraicznie domkniętego i które nie jest algebraicznie domknięte.
12. Podaj definicję oraz przykłady rozszerzenia algebraicznego ciała.
13. Podaj definicję rozszerzenia skończonego ciała.

6. Modele stochastyczne

1. Podaj definicję oraz przykład łańcucha Markowa.

2. Podaj definicję stanu nieistotnego i nieistotnego dyskretnego łańcucha Markowa.

3. Podaj określenie i przykład okresowego łańcucha Markowa.

4. Zdefiniuj relację komunikowania się stanów w dyskretnym łańcuchu Markowa i wykaż, że jest ona relacją typu równoważności.

5. Podaj postać równań Chapmana-Kołmogorowa dla dyskretnego łańcucha Markowa i wyjaśnij ich sens.

6. Podaj określenie rozkładu ergodycznego łańcucha Markowa.

7. Podaj określenie generatora (macierzy Q) łańcucha Markowa z czasem ciągłym i jego związek z macierzą prawdopodobieństw przejścia $P(t) = (p_{ij}(t))$.

8. Podaj definicję procesu urodzin i śmierci.

9. Podaj definicję procesu odnowy i przykład takiego procesu.

10. Podaj treść elementarnego twierdzenia teorii odnowy i wyjaśnij jego sens.

11. Podaj definicję prostego procesu Poissona i narysuj przykładową trajektorię tego procesu.

12. Podaj definicję złożonego procesu Poissona i narysuj przykładową trajektorię tego procesu.

13. Podaj objaśnienie klasyfikacji Kendalla systemów kolejkowych. Scharakteryzuj system typu $M/M/1$.

7. Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe

1. Podaj przykład zagadnienia fizycznego, którego rozwiązywanie prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego.

2. Podaj przykład zagadnienia fizycznego, którego rozwiązywanie prowadzi do równania różniczkowego cząstkowego.

3. Omów równania o rozdzielonych zmiennych. Podaj przykłady równań sprowadzalnych do równań o rozdzielonych zmiennych za pomocą odpowiednich podstawień.

4. Co to jest postać symetryczna równania rzędu pierwszego i jaki jest związek takiego równania z równaniem w postaci normalnej? Kiedy równanie w postaci symetrycznej jest zupełne?

5. Co to jest czynnik całkujący? Posługując się czynnikiem całkującym rozwiąż następujące równanie różniczkowe:
$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

6. Sformułuj twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równań różniczkowych zwyczajnych.

7. Sformułuj twierdzenie Picarda o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równań różniczkowych zwyczajnych.

8. Omów metodę szeregów potęgowych rozwiązywania równań różniczkowych.

9. Omów układy równań różniczkowych liniowych, w tym o stałych współczynnikach, jednorodne i niejednorodne.

10. Omów rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych rzędu n-tego o stałych współczynnikach metodą uzmienniania stałych i metodą przewidywań.

11. Omów równania różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego. Co to są całki pierwsze równania liniowego i nieliniowego? Rozwiąż następujące równanie różniczkowe:
$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} = 0.$$

12. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego dla funkcji dwu zmiennych − klasyfikacja, postać kanoniczna.

13. Problemy początkowe i początkowo-brzegowe dla klasycznych równań fizyki matematycznej – metoda Fouriera rozdzielenia zmiennych.

14. Omów równanie falowe.

15. Omów równanie przewodnictwa cieplnego i jego zastosowania.

16. Omów równanie Laplace'a i funkcje harmoniczne. Podaj ich zastosowania.

8. Metody numeryczne

1. Omów metodę różnic skończonych.

2. Omów metodę elementu skończonego.

3. Przedstaw ideę metod wielokrokowych dla zadania Cauchy'ego.

4. Omów pojęcie rzędu metody dla zadań początkowych oraz jego znaczenie.

5. Omów metody Adamsa Bashfortha i ich zastosowanie.

6. Omów metody Adamsa Moultona i ich zastosowanie.

7. Omów metody predykator-korektor dla zadania Cauchy'ego.

8. Przedstaw rodzinę metod Rungego-Kutty dla zadania Cauchy'ego.

9. Omów wybrany algorytm numeryczny poszukiwania ekstremum funkcji nieliniowej.

9. Teoria informacji i kryptografia

1. Podaj definicję słowa nad ustalonym alfabetem oraz definicję złożenia słów i jego własności.
2. Podaj definicję kodów alfabetycznych, prostych, rozszerzonych i jednoznacznie dekodowalnych kodu rozszerzonego.
3. Zdefiniuj kody z własnością prefiksu, kody z przecinkiem i kody blokowe oraz omów warunki ich jednoznacznej dekodowalności.
4. Podaj nierówność Krafta oraz sformułuj twierdzenie Krafta-McMillana dla kodów alfabetycznych jednoznacznie dekodowalnych.
5. Podaj definicję probabilistycznego modelu źródła informacji oraz definicję ilości informacji.
6. Zdefiniuj pojęcie entropii źródła informacji i jej własności.
7. Podaj definicję średniej długości słowa kodowego i jej porównanie z entropią źródła.
8. Zdefiniuj pojęcie kodów zwięzłych i optymalnych.
9. Omów wybrany algorytm konstrukcji kodu optymalnego lub bliskiego optymalnemu.
10. Omów różnicę między szyframi symetrycznymi i asymetrycznymi.
11. Podaj konstrukcję dowolnego szyfru symetrycznego.
12. Podaj konstrukcję dowolnego sytemu kryptograficznego asymetrycznego i omów problematykę jego bezpieczeństwa.

10. Analiza funkcjonalna

1. Sformułuj definicje przestrzeni unormowanej i przestrzeni Banacha. Podaj przykłady takich przestrzeni.

2. Sformułuj twierdzenie o równoważności norm w przestrzeniach skończenie wymiarowych.

3. Podaj nierówności Höldera i Minkowskiego.

4. Sformułuj twierdzenie Riesza o zwartości kuli w przestrzeni unormowanej skończenie wymiarowej.

5. Podaj definicję i przykłady operatorów liniowych ciągłych na przestrzeniach unormowanych. Wymień warunki równoważne ciągłości operatora liniowego.

6. Zdefiniuj pojęcie przestrzeni sprzężonej do przestrzeni unormowanej. Podaj charakteryzację przestrzeni sprzężonej do przestrzeni $l^p \quad (p \in [1, \infty))$.

7. Sformułuj twierdzenie Banacha-Steinhausa.

8. Sformułuj twierdzenia Banacha o operatorze otwartym, o operatorze odwrotnym oraz o domkniętym wykresie.

9. Sformułuj twierdzenie Hahna-Banacha.

10. Podaj definicję normy w przestrzeni unitarnej, nierówność Schwartza dla iloczynu skalarnego, prawo równoległoboku.

11. Podaj definicję rzutu ortogonalnego w przestrzeniach Hilberta i jego własności.

12. Sformułuj twierdzenie o postaci funkcjonału liniowego i ciągłego na przestrzeni Hilberta.

13. Sformułuj definicję układu ortogonalnego i ortonormalnego w przestrzeni unitarnej. Podaj przykłady układów ortogonalnych w różnych przestrzeniach unitarnych.

14. Podaj definicję współczynników Fouriera względem układu ortogonalnego, własność minimum dla współczynników Fouriera i nierówność Bessela dla układów ortogonalnych.