

**EGZAMIN LICENCJACKI
NA KIERUNKU MATEMATYKA
ROK AKADEMICKI 2018/2019**

1. WSTĘP DO LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI

1. Omów zdania i spójniki logiczne. Czym są tautologie w rachunku zdań i jak je weryfikujemy?
2. Omów funkcje zdaniowe i kwantyfikatory. Sformułuj pojęcie prawa rachunku funkcyjnego.
3. Podaj definicje, przykłady oraz własności następujących pojęć: iniekcja, surjekcja oraz bijekcja.
4. Omów podstawowe działania na zbiorach oraz ich własności. Zdefiniuj i zilustruj na wybranych przykładach pojęcia sum i iloczynów uogólnionych.
5. Podaj definicję relacji równoważności. Omów oraz zilustruj na przykładzie pojęcie klasy abstrakcji względem danej relacji równoważności.
6. Omów pojęcie równoliczności zbiorów. Podaj definicje oraz przykłady zbiorów przeliczalnych oraz nieprzeliczalnych.
7. Sformułuj twierdzenie Cantora-Bernsteina. Podaj wybrane przykłady zastosowania tego twierdzenia.
8. Podaj definicję relacji częściowego porządku. Sformułuj lemat Kuratowskiego-Zorna.
9. Sformułuj zasadę indukcji matematycznej (inaczej: twierdzenie o indukcji matematycznej). Posługując się tym twierdzeniem udowodnij, że zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.

2. ANALIZA MATEMATYCZNA

1. Podaj definicję granicy ciągu liczbowego i omów najważniejsze twierdzenia dotyczące granic.
2. Omów zależności między zbieżnością, ograniczonością i monotonicznością ciągu.
3. Podaj najważniejsze kryteria dotyczące zbieżności szeregów liczbowych.
4. Podaj definicję funkcji oraz najważniejsze własności z nią związane.
5. Omów definicję granicy funkcji w sensie Cauchy'ego i Heinego.
6. Omów pojęcia funkcji ciągłej i jednostajnie ciągłej określonej w przedziale; wskaż odpowiednie przykłady.
7. Omów najważniejsze twierdzenia dotyczące funkcji ciągłych.
8. Zdefiniuj pochodną funkcji w punkcie; omów zależności między ciągłością i różniczkowalnością.
9. Podaj klasyczne twierdzenia rachunku różniczkowego i omów ich wzajemne zależności.
10. Omów zastosowania pochodnych w badaniu zmienności funkcji.
11. Zdefiniuj pojęcie całki nieoznaczonej oraz omów najważniejsze metody całkowania.
12. Omów definicję całki oznaczonej w sensie Riemanna; podaj przykłady funkcji całkownych i niecałkownych.
13. Podaj najważniejsze warunki konieczne i dostateczne całkowności funkcji w sensie Riemanna.
14. Sformułuj główne twierdzenie rachunku całkowego oraz najważniejsze wnioski.
15. Omów najważniejsze zastosowania geometryczne całki oznaczonej.
16. Omów pojęcia całek niewłaściwych oraz sformułuj kryterium całkowe zbieżności szeregów.
17. Omów pojęcia zbieżności punktowej i jednostajnej ciągu i szeregu funkcyjnego.
18. Omów pojęcie przestrzeni metrycznej oraz najważniejsze pojęcia topologiczne dotyczące tej przestrzeni; wskaż odpowiednie przykłady.
19. Zdefiniuj ciągłość, pochodne cząstkowe oraz różniczkowalność funkcji dwu zmiennych; omów wzajemne zależności.

20. Podaj twierdzenia (warunek konieczny i dostateczny) związane ze znajdowaniem ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych.
21. Omów metodę znajdowania ekstremów globalnych funkcji dwu zmiennych w obszarze zwartym.
22. Omów definicję całki oznaczonej funkcji dwu zmiennych w prostokącie oraz podaj twierdzenie o zamianie tej całki na całki iterowane.
23. Omów współrzędne biegunowe oraz ich zastosowanie do obliczania całek podwójnych; wskaż odpowiednie przykłady.
24. Omów przykłady zastosowań geometrycznych i fizycznych całki podwójnej i potrójnej.
25. Zdefiniuj całkę krzywoliniową nieskierowaną oraz wskaż jej zastosowania fizyczne.
26. Podaj twierdzenie Greena o zamianie całki krzywoliniowej skierowanej na całkę podwójną.
27. Omów wybrane przykłady zastosowań całki powierzchniowej niezorientowanej.
28. Podaj twierdzenia Gaussa i Stokesa związane z całką powierzchniową zorientowaną.
29. Zdefiniuj trygonometryczny szereg Fouriera; przedstaw wybrany przykład rozwinięcia funkcji w ten szereg.
30. Omów metody znajdowania całek ogólnych i szczególnych najprostszycich typów równań różniczkowych.

3. ALGEBRA

1. Podaj definicje działań modulo n . Omów algebraiczne własności tych działań.
2. Omów algorytm Euklidesa i jego zastosowania.
3. Sformułuj Małe Twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera.
4. Sformułuj Chińskie Twierdzenie o Resztach.
5. Podaj definicję permutacji, omów metody zapisu permutacji i działania na permutacjach.
6. Podaj definicję grupy, podgrupy i przykłady grup abelowych i nieabelowych.
7. Sformułuj twierdzenie Lagrange'a o podgrupach grup skończonych. Zilustruj to twierdzenie odpowiednimi przykładami.
8. Podaj definicję pierścienia, podpierścienia i przykłady pierścieni przemiennych i nieprzemiennych.
9. Podaj definicję ciała i przykłady ciał, w tym przykłady ciał skończonych.
10. Podaj definicję wielomianu. Omów działania na wielomianach i ich własności.
11. Podaj definicję pierwiastka wielomianu oraz sformułuj twierdzenie Bézouta i twierdzenie o pierwiastkach wielokrotnych.
12. Podaj definicję wielomianu nierozkładalnego i sformułuj twierdzenie o rozkładzie wielomianów. Omów nierozkładalność wielomianów w ciałach \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} .

4. GEOMETRIA

1. Omów różne rodzaje geometrii. Podaj dowolny model dowolnie wybranej geometrii nieuklidesowej.
2. Podaj definicję izometrii oraz klasyfikację izometrii płaszczyzny.
3. Omów zapis izometrii w przestrzeni \mathbb{R}^2 jako przekształceń afinicznych oraz metodę rozpoznawania rodzaju izometrii zapisanej przy pomocy afinicznego wzoru.
4. Podaj definicję krzywych stożkowych oraz omów klasyfikację tych krzywych.
5. Omów klasyfikację powierzchni stopnia drugiego.
6. Podaj definicję iloczynu skalarnego i omów macierzowy opis iloczynów skalarnych w przestrzeni liniowej skończonej wymiarowej.
7. Sformułuj twierdzenie Cauchy-Buniakowskiego-Schwartz'a.
8. Omów metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta.
9. Podaj definicje macierzy symetrycznej, hermitowskiej, ortogonalnej, unitarnej oraz ich zastosowania w geometrii.
10. Podaj definicję przestrzeni topologicznej i przykłady.
11. Podaj definicję trójnogu Freneta oraz krzywizny i torsji krzywej w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

5. ALGEBRA LINIOWA I GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. Podaj definicję i sposoby zapisu liczb zespolonych.
2. Podaj zastosowania zapisu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.
3. Podaj definicje działań i ich podstawowe własności w pierścieniu macierzy kwadratowych ustalonego wymiaru nad dowolnym ciałem.
4. Przedstaw metody rozwiązywania liniowych układów równań.
5. Podaj różne definicje wyznacznika. Podaj przykładowe własności i zastosowania wyznacznika.
6. Podaj definicję i przykłady przestrzeni i podprzestrzeni liniowych.
7. Podaj definicję bazy i wymiaru przestrzeni liniowej. Przedstaw wybraną metodę wyznaczania bazy skończenie wymiarowej.
8. Podaj metodę konstrukcji reprezentacji macierzowej przekształcenia liniowego w przestrzeniach skończenie wymiarowych.
9. Podaj definicję przekształcenia liniowego oraz jądra i obrazu przekształcenia liniowego. Omów wybrany przykład.
10. Podaj definicję wartości własnych i wektorów własnych operatora liniowego. Omów wybrany przykład.
11. Podaj definicję macierzy Jordana i omów metodę znajdowania macierzy w postaci Jordana dla operatorów liniowych w przestrzeniach skończenie wymiarowych.

6. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

1. Podaj wzór na prawdopodobieństwo całkowite oraz wzór Bayesa.
2. Podaj aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa oraz definicję przestrzeni probabilistycznej.
3. Podaj definicję zmiennej losowej typu dyskretnego i przykład takiej zmiennej.
4. Podaj definicję zmiennej losowej typu ciągłego i przykład takiej zmiennej.
5. Zdefiniuj dystrybuantę zmiennej losowej i omów jej najważniejsze własności.
6. Scharakteryzuj jednowymiarowy normalny rozkład prawdopodobieństwa.
7. Podaj definicję dystrybuanty łącznej dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) oraz dystrybuant brzegowych zmiennych X i Y . Jak można wykorzystać te pojęcia w badaniu niezależności zmiennych losowych X i Y ?
8. Podaj definicję dystrybuanty warunkowej i gęstości warunkowej zmiennej losowej X przy warunku $Y=y$.
9. Omów najważniejsze charakterystyki liczbowe zmiennej losowej i ich podstawowe własności.
10. Scharakteryzuj typy zbieżności ciągów zmiennych losowych.
11. Sformułuj słabe i mocne prawo wielkich liczb.
12. Podaj treść centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego i przykład jego praktycznego zastosowania.
13. Zdefiniuj funkcję charakterystyczną zmiennej losowej i omów jej podstawowe własności.
14. Zdefiniuj funkcję tworzącą zmiennej losowej typu dyskretnego i omów jej podstawowe własności.

7. WSTĘP DO STATYSTYKI

1. Omów najważniejsze miary przeciętne (średnie) służące do opisu zbiorowości statystycznej.
2. Omów najważniejsze miary zróżnicowania (rozproszenia) służące do opisu zbiorowości statystycznej.
3. Zdefiniuj pojęcie nieobciążoności i zgodności estymatora.
4. Omów metodę największej wiarygodności wyznaczania estymatora nieznanego parametru rozkładu na podstawie próby losowej prostej pochodzącej z tego rozkładu.
5. Podaj nierówność Rao-Cramera dla estymatorów i wyjaśnij jej sens.
6. Na wybranym przykładzie omów pojęcie przedziału ufności.
7. Scharakteryzuj integralne elementy testu statystycznego: hipoteza zerowa, hipoteza alternatywna, statystyka testowa i zbiór krytyczny.
8. Zdefiniuj błąd pierwszego i drugiego rodzaju w teście statystycznym. Co to jest moc testu?
9. Na wybranym przykładzie omów parametryczny test istotności.
10. Scharakteryzuj najważniejsze nieparametryczne testy zgodności rozkładu: test chi-kwadrat Pearsona oraz test Kołmogorowa.
11. Zdefiniuj współczynnik korelacji liniowej Pearsona dla dwuwymiarowej próby losowej i scharakteryzuj jego własności.
12. Omów sposób wyznaczania parametrów prostej regresji cechy Y względem cechy X za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Jak można ocenić dopasowanie prostej regresji do empirycznych danych?

8. METODY NUMERYCZNE

1. Omów wybraną metodę przybliżonego rozwiązywania równań nieliniowych.
2. Sformułuj zagadnienie interpolacji oraz omów interpolację Lagrange'a.
3. Na czym polega zagadnienie aproksymacji? Omów aproksymację średniokwadratową.
4. Omów kwadratury Newtona-Cotesa.
5. Omów wybraną jednokrokową metodę przybliżonego rozwiązywania zagadnień początkowych.

9. PRZEDMIOTY INFORMATYCZNO-TECHNICZNE

1. Omów działanie maszyny Turinga.
2. Podaj definicję entropii. Podaj przykład zastosowań.
3. Omów algorytm generowania zbioru Mandelbrota.
4. Napisz funkcję obliczającą średnią arytmetyczną z liczb rzeczywistych zapisanych w tablicy. Na wejściu funkcja przyjmuje wartości zmiennoprzecinkowe zapisane w tablicy przekazanej poprzez wskaźniki i zwraca wartość zmiennoprzecinkową.
5. Napisz funkcję znajdującą największą liczbę z liczb całkowitych zapisanych w tablicy.
6. Napisz funkcję obliczającą objętość kuli dla zadanego promienia. Na wejściu funkcja przyjmuje wartości zmiennoprzecinkowe i zwraca wartość zmiennoprzecinkową. Wykorzystywane stałe mają być zdefiniowane wewnątrz tej funkcji.
7. Napisz funkcję sortującą tablicę liczb całkowitych od najmniejszej do największej liczby przy pomocy algorytmu sortowania bąbelkowego.
8. Napisz funkcję obliczającą iloczyn skalarny dwóch wektorów zapisanych w tablicach liczb rzeczywistych. Na wejściu funkcja przyjmuje dwie tablice liczb rzeczywistych i zwraca wartość zmiennoprzecinkową.
9. Omów matematyczny model Lotki-Volterra.
10. Przedstaw stacjonarny i niestacjonarny model przepływu ciepła.
11. Omów model matematyczny oscylatora harmonicznego.