

**EGZAMIN MAGISTERSKI
NA KIERUNKU MATEMATYKA
ROK AKADEMICKI 2018/2019**

1. LOGIKA I PODSTAWY MATEMATYKI

1. Omów aksjomaty klasycznego rachunku zdań i reguły dowodzenia. Sformułuj twierdzenie o dedukcji. Zdefiniuj wszystkie terminy występujące w sformułowaniu.
2. Sformułuj twierdzenie o zupełności dla klasycznego rachunku zdań. Zdefiniuj wszystkie terminy występujące w sformułowaniu.
3. Omów logikę predykatów 1-go rzędu. Zdefiniuj terminy i formuły języka L , formułę spełnioną w strukturze, tautologię. Podaj odpowiednie przykłady.
4. Podaj aksjomaty logiki predykatów 1-go rzędu i reguły dowodzenia. Podaj definicję dowodu formuły i sformułuj twierdzenie o dedukcji.
5. Sformułuj twierdzenie o zupełności dla logiki predykatów 1-go rzędu. Zdefiniuj wszystkie terminy występujące w sformułowaniu.
6. Omów maszyny Turinga, funkcje obliczalne i funkcje rekurencyjne. Przedstaw Tezę Churcha.
7. Omów zbiory rekurencyjne i rekurencyjnie przeliczalne oraz związki pomiędzy tymi pojęciami. Omów uniwersalne funkcje rekurencyjne i podaj przykłady zbiorów nierekurencyjnych.
8. Omów arytmetykę Peano. Sformułuj twierdzenie Gödla o niezupełności.
9. Omów aksjomatyzację teorii mnogości. Przedstaw aksjomat wyboru.
10. Omów zbiory uporządkowane, zbiory dobrze uporządkowane i zasadę indukcji pozaskończonej. Podaj przykłady zastosowań tej zasady.
11. Omów liczby porządkowe (ordynalne), własności liczb porządkowych, arytmetykę liczb porządkowych oraz liczby kardynalne.

2. ALGEBRA Z ZASTOSOWANIAM

1. Omów kody blokowe, kodowania umożliwiające wykrywanie/korygowanie błędów. Podaj podstawowe własności takich kodowań oraz przykłady.
2. Omów kodowanie grupowe, kodowanie macierzowe, macierz kontroli parzystości. Przedstaw ich podstawowe własności i przykłady.
3. Omów kody wielomianowe, ich podstawowe własności i przykłady.
4. Podaj definicję i podstawowe własności kodów doskonałych. Podaj definicję kodów Hamminga.
5. Omów ciała skończone ze szczególnym uwzględnieniem grupy mnożeniowej ciała i ilości elementów. Podaj postać wielomianów minimalnych nad podciałem prostym.
6. Omów kody BCH, ich podstawowe własności i przykłady.
7. Omów maszyny Turinga i obliczalność, czas pracy, przestrzeń pracy, maszyny wielotaśmowe i symulację takich maszyn.
8. Omów złożoność obliczeniową, klasy P i PSPACE. Podaj przykłady.
9. Omów maszyny niedeterministyczne, klasę NP, własności języków klasy NP, języki NP-zupełne. Podaj przykłady.
10. Omów funkcje 1-kierunkowe, problem faktoryzacji, protokół RSA.

3. TOPOLOGIA

1. Podaj definicje przestrzeni metrycznej oraz kuli otwartej, zbioru otwartego i zbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej.
2. Podaj definicję przestrzeni topologicznej oraz zbioru otwartego i zbioru domkniętego w przestrzeni topologicznej.
3. Podaj definicje i własności operacji wnętrza i domknięcia zbiorów w przestrzeni topologicznej. Podaj przykłady.
4. Sformułuj definicje zbieżności ciągu w przestrzeni topologicznej i w przestrzeni metrycznej. Jaka moc może mieć zbiór granic ciągu w przestrzeni topologicznej i w przestrzeni metrycznej?
5. Podaj definicje i przykłady zbioru gęstego i zbioru brzegowego w przestrzeni topologicznej.
6. Sformułuj definicję bazy przestrzeni topologicznej. Podaj przykład przestrzeni topologicznej i jej bazy, która ma mniejszą moc niż moc całej topologii.
7. Podaj definicję i wymień podstawowe własności przestrzeni Hausdorffa.
8. Zdefiniuj przestrzeń ośrodkową i omów jej podstawowe własności. Podaj przykłady przestrzeni ośrodkowych i nieośrodkowych.
9. Podaj definicję przekształcenia ciągłego przestrzeni topologicznych. Wymień kilka własności dziedziny zachowywanych przez przekształcenia ciągłe.
10. Podaj definicję homeomorfizmu. Wymień kilka niezmienników homeomorfizmów (tzn. własności przestrzeni, które są zachowywane przez homeomorfizmy). Podaj przykład co najmniej jednej własności, która nie musi być zachowywana przez homeomorfizm.
11. Podaj definicję i wymień kilka własności zwartej przestrzeni topologicznej i w szczególności metrycznej. Podaj przykłady przestrzeni zwartych i niezwartych.
12. Sformułuj definicję spójności przestrzeni topologicznej. Podaj przykłady przestrzeni spójnych i niespójnych.

4. ANALIZA MATEMATYCZNA I

1. Podaj definicję i zastosowania całki krzywoliniowej nieorientowanej na płaszczyźnie \mathbb{R}^2 i w przestrzeni \mathbb{R}^3 .
2. Podaj definicję oraz własności całki krzywoliniowej zorientowanej w \mathbb{R}^2 i w \mathbb{R}^3 .
3. Podaj wzór Greena i omów kilka jego zastosowań.
4. Podaj definicję i wybrane własności całki powierzchniowej nieorientowanej (I-go rodzaju).
5. Podaj definicję i wybrane własności całki powierzchniowej zorientowanej (II-go rodzaju). Co to jest strumień pola wektorowego i jaki jest jego związek z całką podwójną?
6. Omów twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego o związku między całką powierzchniową po zamkniętej powierzchni S_j a całką potrójną.
7. Co to jest potencjał pola wektorowego \vec{F} i jak się go znajduje?
8. Podaj definicje i podstawowe własności rotacji, dywergencji i cyrkulacji pola wektorowego \vec{F} w \mathbb{R}^3 .
9. Omów twierdzenie Stokesa.
10. Sformułuj kryterium Dirichleta zbieżności szeregów zespolonych postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$. Omów jego zastosowanie do badania zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ dla $|z| = 1$, $z \neq 1$.
11. Sformułuj definicję szeregu potęgowego i jego obszaru zbieżności. Omów twierdzenie o identyczności szeregów potęgowych.
12. Podaj definicję i własności funkcji holomorficzej. Omów równania Cauchy'ego-Riemanna.
13. Omów pojęcie funkcji harmoniczných dwóch zmienných w kontekście ich związku z częścią rzeczywistą i urojoną funkcji holomorficzej.
14. Omów odwzorowania konforemne. Omów podstawowe własności odwzorowań homograficznych.

5. ANALIZA MATEMATYCZNA II

1. Omów twierdzenie całkowe Cauchy'ego.
2. Podaj wzór całkowy Cauchy'ego.
3. Omów zasadę maksimum (lemat Schwarz'a) modułu funkcji analitycznej.
4. Omów szeregi Laurenta, ich obszary zbieżności i własności.
5. Przedstaw twierdzenie o residuach.
6. Podaj definicję i własności transformacji Laplace'a. Omów twierdzenie Borela o transformacie Laplace'a splotu oryginałów.
7. Omów zastosowanie przekształcenia Laplace'a do znajdowania rozwiązań równań różniczkowych liniowych i układów równań o stałych współczynnikach.
8. Podaj definicję i własności funkcji o wahaniu skończonym. Omów twierdzenie Jordana.
9. Podaj definicję zbiorów miary Lebesgue'a zero w przestrzeni \mathbb{R}^n . Uzasadnij, że tworzą one ideał podzbiorów w \mathbb{R}^n .
10. Omów pojęcie miary Lebesgue'a w \mathbb{R}^n .
11. Podaj definicję i omów własności funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a w \mathbb{R}^n .

6. ANALIZA FUNKCJONALNA

1. Sformułuj definicje przestrzeni unormowanej i przestrzeni Banacha. Podaj przykłady takich przestrzeni.
2. Sformułuj twierdzenie o równoważności norm w przestrzeniach skończenie wymiarowych.
3. Podaj nierówności Höldera i Minkowskiego.
4. Sformułuj twierdzenie Riesz o zwartości kuli w przestrzeni unormowanej skończenie wymiarowej.
5. Podaj definicję i przykłady operatorów liniowych ciągłych na przestrzeniach unormowanych. Wymień warunki równoważne ciągłości operatora liniowego.
6. Zdefiniuj pojęcie przestrzeni sprzężonej do przestrzeni unormowanej. Podaj charakterystykę przestrzeni sprzężonej do przestrzeni l^p ($p \in [1, \infty)$).
7. Sformułuj twierdzenie Banacha-Steinhausa.
8. Sformułuj twierdzenia Banacha o operatorze otwartym, o operatorze odwrotnym oraz o domkniętym wykresie.
9. Sformułuj twierdzenie Hahna-Banacha.
10. Podaj definicję normy w przestrzeni unitarnej, nierówność Schwartza dla iloczynu skalarnego, prawo równoległoboku.
11. Podaj definicję rzutu ortogonalnego w przestrzeniach Hilberta i jego własności.
12. Sformułuj twierdzenie o postaci funkcjonału liniowego i ciągłego na przestrzeni Hilberta.
13. Sformułuj definicję układu ortogonalnego i ortonormalnego w przestrzeni unitarnej. Podaj przykłady układów ortogonalnych w różnych przestrzeniach unitarnych.
14. Podaj definicję współczynników Fouriera względem układu ortogonalnego, własność minimum dla współczynników Fouriera i nierówność Bessela dla układów ortogonalnych.

7. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE ZWYCZAJNE I CZĄSTKOWE

1. Podaj przykład zagadnienia fizycznego, którego rozwiązywanie prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego.
2. Podaj przykład zagadnienia fizycznego, którego rozwiązywanie prowadzi do równania różniczkowego cząstkowego.
3. Omów równania o rozdzielonych zmiennych. Podaj przykłady równań sprowadzalnych do równań o rozdzielonych zmiennych za pomocą odpowiednich podstawień.
4. Co to jest postać symetryczna równania rzędu pierwszego i jaki jest związek takiego równania z równaniem w postaci normalnej? Kiedy równanie w postaci symetrycznej jest zupełne?
5. Co to jest czynnik całkujący? Posługując się czynnikiem całkującym $\mu = \mu(x)$ rozwiąż następujące równanie różniczkowe:

$$(x + y^2)dx - 2xydy = 0.$$

6. Sformułuj twierdzenie Peano o istnieniu rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równań różniczkowych zwyczajnych.
7. Sformułuj twierdzenie Picarda o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równań różniczkowych zwyczajnych.
8. Omów metodę szeregów potęgowych rozwiązywania równań różniczkowych.
9. Omów układy równań różniczkowych liniowych, w tym o stałych współczynnikach, jednorodne i niejednorodne.
10. Omów rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych rzędu n -tego o stałych współczynnikach metodą uzmienniania stałych i metodą przewidywań.
11. Omów równania różniczkowe cząstkowe rzędu pierwszego. Co to są całki pierwsze równania liniowego i nieliniowego? Rozwiąż następujące równanie różniczkowe:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

12. Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego dla funkcji dwu zmiennych – klasyfikacja, postać kanoniczna.
13. Problemy początkowe i początkowo-brzegowe dla klasycznych równań fizyki matematycznej – metoda Fouriera rozdzielenia zmiennych.
14. Omów równanie falowe.
15. Omów równanie przewodnictwa cieplnego i jego zastosowania.
16. Omów równanie Laplace'a i funkcje harmoniczne. Podaj ich zastosowania.

8. METODY NUMERYCZNE W TECHNICIE

1. Omów metodę różnic skończonych.
2. Omów metodę elementu skończonego.
3. Omów wybraną metodę wielokrokową przybliżonego rozwiązywania zagadnień Cauchy'ego.
4. Omów metody predyktor-korektor przybliżonego rozwiązywania zagadnień Cauchy'ego.
5. Omów wybraną metodę przybliżonego rozwiązywania równań całkowych.

9. MODELOWANIE I SYMULACJA STOCHASTYCZNA

1. Podaj definicję procesu Poissona i omów jego najważniejsze własności.
2. Zdefiniuj dyskretny łańcuch Markowa i podaj przykład takiego łańcucha.
3. Podaj definicję rozkładu ergodycznego dyskretnego łańcucha Markowa oraz sposób wyznaczania tego rozkładu w przypadku łańcucha o skończonej przestrzeni stanów.
4. Podaj określenie ciągłego procesu odnowy oraz postać równania odnowy dla tego procesu, a także sposób jego rozwiązania metodą operatorową.
5. Podaj definicję łańcucha Markowa z czasem ciągłym oraz macierzy intensywności (generatora). Omów sposób konstrukcji trajektorii tego procesu na podstawie jego generatora.
6. Zdefiniuj proces gałązkowy Galtona-Watsona rozwoju populacji i podaj związany z nim warunek wymieralności populacji.
7. Omów metodę generowania zmiennej losowej ciągłej o zadanej dystrybucji metodą funkcji odwrotnej.
8. Omów metodę eliminacji generowania zmiennej losowej typu ciągłego.

10. METODY EKSPŁORACJI DANYCH

1. Omów ideę metody składowych głównych i jej zasadnicze cele.
2. Omów metodę konstrukcji "naiwnego" klasyfikatora bayesowskiego i sposób wykorzystania go w praktyce.
3. Na wybranym przykładzie scharakteryzuj pojęcie drzewa decyzyjnego oraz klasyfikacji za pomocą tego drzewa.
4. Omów ideę grupowania hierarchicznego i pojęcie dendrogramu.
5. Scharakteryzuj metodę grupowania k-średnich.
6. Podaj definicję reguły asocjacyjnej oraz zdefiniuj wsparcie i ufność reguły, ilustrując te pojęcia odpowiednim przykładem.
7. Omów działanie algorytmu APRIORI odkrywania zbiorów częstych.
8. Podaj definicję sekwencji oraz wzorca sekwencji i zilustruj je przykładem.

11. PROGRAMOWANIE OBIEKTOWE

1. Przedstaw podstawowe założenia paradygmatu obiektowego.
2. Przedstaw różnice między programowaniem obiektowym a programowaniem strukturalnym.
3. Opisz podtypy programowania obiektowego oparte na prototypach oraz oparte na klasach.
4. Wyjaśnij pojęcie abstrakcji w programowaniu obiektowym.
5. Wyjaśnij pojęcie hermetyzacji w programowaniu obiektowym.
6. Wyjaśnij pojęcie polimorfizmu w programowaniu obiektowym.
7. Przedstaw zastosowanie dziedziczenia w programowaniu obiektowym.
8. Przedstaw zastosowania przeciążenia metod i operatorów w programowaniu obiektowym.