Twierdzenie Archimedesa o paraboli oraz o metodzie wyczerpywania.

Marcin Szweda

5 listopada 2015

Z cyklu Akademickie myśli „osłodzone”:

> Jak wieść gminna z Syrakuz niesie,
> wór pełen pomysłów, pozostał po Archimedesie!
>
> Czy siedząc w wannie, czy na sedesie
> – warto pamiętać o Archimedesie!

1 Twierdzenie Archimedesa o paraboli.

Tytułowe twierdzenie możemy sformułować następująco:

Twierdzenie 1. *Dana jest cięciwa AB paraboli $f(x) = ax^2$ (przy czym $A(x_A, ax_A^2)$, $B(x_B, ax_B^2)$) i punkt C należący do łuku AB o współrzędnych $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{a(x_A+x_B)^2}{4}\right)$. Wówczas stosunek pola odcinka AB paraboli do pola trójkąta ABC jest równy $\frac{4}{3}$.*

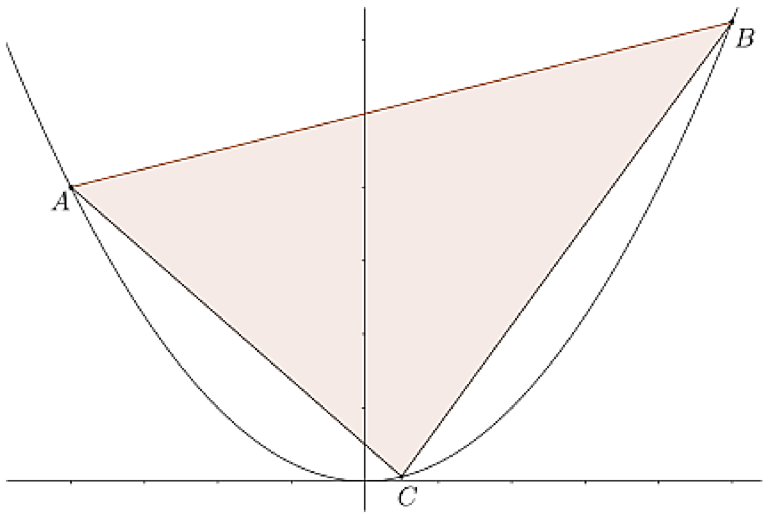
Przypomnijmy, że odcinek AB paraboli $f(x) = ax^2$ to obszar na płaszczyźnie Oxy ograniczony łukiem ACB tej paraboli i cięciwą AB, jak na rysunku poniżej. Bez zmiejszania ogólności przyjmijmy, że: $x_A < x_B$.
Wyznaczymy równanie prostej AB:

$$y = \alpha x + \beta.$$

W tym celu wstawimy współrzędne puktów A i B do równania prostej, tworząc układ równań:

$$\begin{cases} ax_A^2 = \alpha x_A + \beta \\ ax_B^2 = \alpha x_B + \beta \end{cases}.$$

Artykuł ten powstał w marcu 2012 roku, a inspiracją były zajęcia z historii matematyki prowadzone przez dra hab. inż. Romana Wituły. Pierwsze poprawki przeszedł kilka miesięcy później, a we wrześniu 2012r. został wygłoszony jako referat w ramach Konferencji Zastosowań Matematyki w Technice, Informatyce i Ekonomii, która co roku odbywa się na naszym Wydziale.



Rysunek 1: Ilustracja odcinka AB paraboli i trójkąta ABC.

Odejmując równania stronami otrzymujemy:

$$a(x_A^2 - x_B^2) = \alpha(x_A - x_B)$$

i dalej

$$\alpha = a(x_A + x_B),$$

$$\beta = ax_A^2 - a(x_A + x_B)x_A = -ax_Ax_B,$$

co daje równanie prostej AB:

$$y = ax(x_B + x_A) - ax_Ax_B.$$

Teraz przechodząc do postaci ogólnej równania prostej AB otrzymujemy[1]:

$$ax(x_B + x_A) - y - ax_Ax_B = 0.$$

W celu wyznaczenia pola trójkąta ABC obliczmy odległość punktu C od prostej AB (ozn. l_{AB}), czyli wysokość trójkąta ABC opuszczoną na bok AB (ozn.

[1] Łatwo można zweryfikować, że styczna w punkcie C do wykresu dyskutowanej tutaj paraboli $f(x) = ax^2$ jest równoległa do prostej AB.

$d(C, l_{AB})$). Znajdujemy:

$$d(C,l_{AB}) = \frac{\left|a\frac{x_B+x_A}{2}(x_B+x_A) - a\left(\frac{x_B+x_A}{2}\right)^2 - ax_Ax_B\right|}{\sqrt{a^2(x_B+x_A)^2+1}} =$$
$$= \frac{\left|a\frac{(x_B+x_A)^2-4x_Bx_A}{4}\right|}{\sqrt{a^2(x_B+x_A)^2+1}} = \frac{\left|a\frac{x_B^2+2x_Ax_B+x_A^2-4x_Ax_B}{4}\right|}{\sqrt{a^2(x_B+x_A)^2+1}} =$$
$$= \frac{|a|(x_B-x_A)^2}{4\sqrt{a^2(x_B+x_A)^2+1}}.$$

Stąd długość boku AB jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(ax_B^2-ax_A^2)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_B-x_A)^2+a^2(x_B-x_A)^2(x_B+x_A)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_B-x_A)^2(a^2(x_B+x_A)^2+1)}.$$

Następnie obliczamy pole trójkąta ABC:

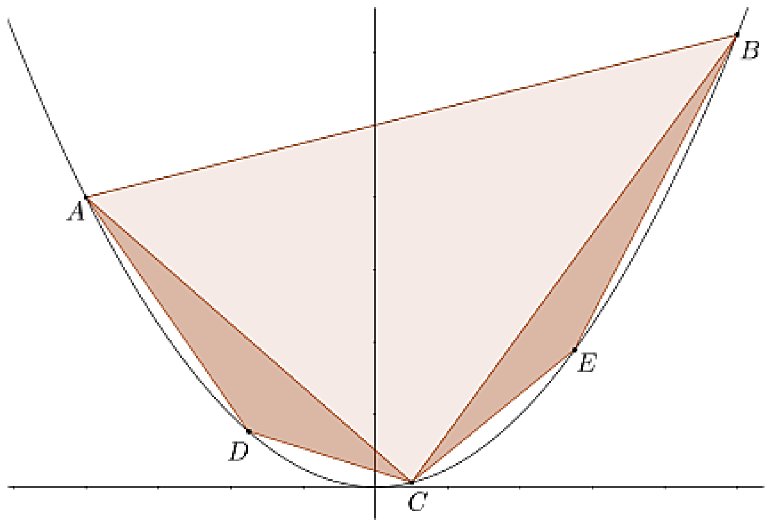
$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot d(C,l_{AB})\cdot|AB|,$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|a|\cdot(x_B-x_A)^2}{4\sqrt{a^2(x_B+x_A)^2+1}}\cdot\sqrt{a^2(x_B+x_A)^2+1}\cdot\sqrt{(x_B-x_A)^2} =$$
$$= \frac{1}{8}|a|\cdot(x_B-x_A)^2\cdot|x_B-x_A| = |a|\cdot\left(\frac{x_B-x_A}{2}\right)^3. \tag{1}$$

Aby wyznaczyć pole odcinka AB paraboli wpisujemy w ten odcinek kolejne trójkąty:

- w pierwszym kroku $\triangle ABC$,
- w drugim kroku $\triangle ADC$ oraz $\triangle CEB$,
- w trzecim kroku $\triangle AFD$, $\triangle DGC$, $\triangle CHE$ oraz $\triangle EIB$,
- itd,

przy czym $\triangle ADC$ tworzymy tak, aby punkt D należał do łuku AC oraz jego współrzędna x-owa była równa $x_D = \frac{x_A+x_C}{2}$. Analogicznie tworzymy kolejne trójkąty: $\triangle CEB$, $\triangle AFD$, $\triangle DGC$, $\triangle CHE$, $\triangle EIB$,...
Spróbujmy teraz obliczyć sumę pól trójkątów otrzymanych w wyniku opisanej powyżej procedury. W tym celu policzymy najpierw sumę pól $\triangle ADC$ oraz $\triangle CEB$ korzystając ze wzoru (1). Mamy:



Rysunek 2: Drugi krok procedury.

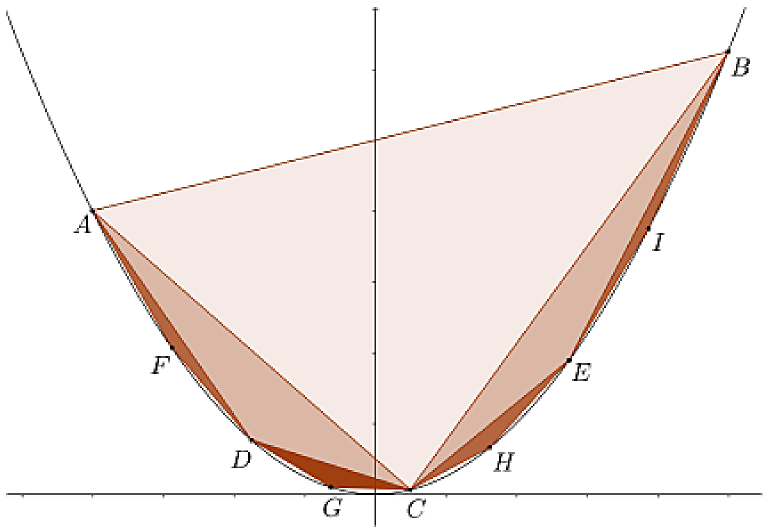
$$P_{\triangle ADC} = \left(\frac{x_C - x_A}{2}\right)^3 \cdot |a| = \left(\frac{\frac{x_A + x_B}{2} - x_A}{2}\right)^3 \cdot |a| = \left(\frac{x_B - x_A}{4}\right)^3 \cdot |a| =$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x_B - x_A}{2}\right)^3 \cdot |a| = \frac{1}{8} \cdot P_{\triangle ABC},$$

$$P_{\triangle CEB} = \left(\frac{x_B - x_C}{2}\right)^3 \cdot |a| = \left(\frac{x_B - \frac{x_A + x_B}{2}}{2}\right)^3 \cdot |a| = \left(\frac{x_B - x_A}{4}\right)^3 \cdot |a| =$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{x_B - x_A}{2}\right)^3 \cdot |a| = \frac{1}{8} \cdot P_{\triangle ABC},$$

skąd

$$P_{\triangle ADC} + P_{\triangle CEB} = \frac{1}{4} \cdot P_{\triangle ABC}.$$

Zauważmy teraz, że suma pól trójkątów w każdym kolejnym kroku tworzy ciąg



Rysunek 3: Trzeci krok procedury.

geometryczny (ozn. a_n) o ilorazie $\frac{1}{4}$, ponieważ:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= P_{\triangle ABC}, \\
a_2 &= \frac{1}{8} \cdot P_{\triangle ABC} + \frac{1}{8} \cdot P_{\triangle ABC}, \\
a_3 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot P_{\triangle ABC} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot P_{\triangle ABC} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot P_{\triangle ABC} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot P_{\triangle ABC}. \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{1}{8^{n-1}} \cdot P_{\triangle ABC} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot P_{\triangle ABC}.
\end{aligned}
$$

Niech P_p oznacza pole odcinka AB paraboli. Wówczas mamy:

$$
\begin{aligned}
P_p &= P_{\triangle ABC} + \frac{1}{4} P_{\triangle ABC} + \frac{1}{16} P_{\triangle ABC} + \ldots = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \cdot P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABC} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = P_{\triangle ABC} \cdot \frac{4}{3},
\end{aligned}
$$

czyli

$$\frac{P_p}{P_{\triangle ABC}} = \frac{4}{3}.$$

Twierdzenie to można łatwo uogólnić na dowolną parabolę, korzystając z równania krzywej stopnia drugiego w postaci kanonicznej.

Uwaga 1. *Michael Golomb oraz Hiroshi Haruki udowodnili*[2]*, że jeśli odcinek*

[2] M. Golomb, H. Haruki, *An Inequality for Elliptic and hyperbolic segments*, Mathematics Magazine, **46** No. 3 (1973), 152-155.

paraboli zastąpimy odcinkiem elipsy, to stosunek pola tego odcinka do pola odpowiedniego trójkąta wpisanego w ten odcinek jest większy niż $\frac{4}{3}$, natomiast w przypadku odcinka dowolnej gałęzi hiperboli mamy, że analogiczny stosunek pól jest mniejszy niż $\frac{4}{3}$.[3] *Michael Golomb podał również uogólnienia n-wymiarowe tych faktów, m.in. dla kwadryk.*

Uwaga 2. *Metoda dowodu twierdzenia 1 – zaproponowana powyżej – autentycznie wywodzi się od Archimedesa i nosi dzisiaj nazwę metody wyczerpywania. Ze względu na powszechność tej metody dowodzenia, w kolejnym rozdziale przedstawimy jeszcze kilka innych przykładów jej zastosowania.*

2 Metoda wyczerpywania.

Zagadnienie 1 (Roman Wituła)**.**
Do wypełnionej cieczą zlewki o promieniu podstawy R wkładamy szklany pręt o promieniu przekroju $r < R$. O ile podniesie się poziom cieczy w zlewce (tzw. menisk)?

Rozwiązanie.
Z pierwotnego poziomu H cieczy szklany pręt wykroił $\pi r^2 H$ objętości cieczy, która wypełni $\pi R^2 H_1$ objętości zlewki. Zatem:

$$H_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 H.$$

Szklany pręt wykroi $\pi r^2 H_1$ tej nowej zawartości, która wypełni $\pi R^2 H_2$ objętości zlewki. Oczywiście:

$$H_2 = \left(\frac{r}{R}\right)^2 H_1 = \left(\frac{r}{R}\right)^4 H.$$

Iterując tę procedurę (do wyczerpania objętości unoszonej cieczy) otrzymujemy w każdym kroku podniesienie poziomu cieczy o $H_n = \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} H$, $n \in \mathbb{N}$, jednostek długości. Ostatecznie ciecz w zlewce podniosła się o:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{2n} H = \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} H$$

jednostek długości. □

Komentarz.
W przedstawionym rozwiązaniu zarówno zlewka, jak i szklany pręt były walcami. Można też zastąpić zlewkę – kolbą stożkową (stożkiem kołowym) lub kolbą kulistą. I to również nie są jedyne możliwości.

[3]Znacznie ładniejszy dowód tych faktów (w stosunku do autorskiego pomysłu Golomba i Harukiego) i to zarówno od strony technicznej jak i merytorycznej zaproponował holenderski matematyk O. Botemma w *Archimedes Revisited*, Mathematics Magazine, **57** No. 4 (1984), 224-225.

Zagadnienie 2 (Józef Burzyk).
Dla dowolnych dwóch zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^2$ mierzalnych w sensie Jordana, zbiór A można wypełnić przeliczalną rodziną $\mathcal{R}$ kopii zbioru B (tj. zbiorów podobnych do zbioru B) w tym sensie, że zbiór będący różnicą mnogościową zbioru A i sumy $\bigcup \mathcal{R}$ posiada miarę Jordana zero.

Dowód tego twierdzenia został przedstawiony przez autora na seminarium Zakładu Analizy i Topologii na naszym Wydziale dnia 20.10.2015 roku. Aktualnie dr Burzyk przygotowuje ogólniejszą wersję tego twierdzenia do opublikowania w American Mathematical Monthly.

Zagadnienie 3 (Twierdzenia o pokryciach rozłącznych – w sensie mnogościowym – w teorii funkcji rzeczywistych).

Tak naprawdę mieści się tu również wynik przedstawiony wcześniej przez dra Burzyka, ale ze względu na jego oryginalność (dotyczy jedynie miary Jordana) wydzieliliśmy go z tej serii twierdzeń.
Do sformułowania przynajmniej jednego z całej serii takich twierdzeń, posłużyliśmy się monografią: Miguel De Guzmán, *Differentation of integrals in* $\mathbb{R}^n$, Springer, 1975, należącą do kanonu opracowań na temat twierdzeń o pokryciach. Następujące twierdzenie (wariant twierdzenia Vitaliego o pokryciu) udowodnił „prawdopodobnie" sam De Guzmán[4]:

Twierdzenie 2. *Niech $A \subset \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że dla każdego $x \in A$ ustalony jest ciąg $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ domkniętych kostek n-wymiarowych o środkach w x i średnicach zbieżnych do zera. Wówczas z rodziny $T := \{Q_k(x) \colon\ x \in A \ \wedge\ k \in \mathbb{N}\}$ można wybrać ciąg $\{S_k\}_{k=1}$ parami rozłącznych kostek (ciąg ten może być skończony), taki, że (miara Lebesgue'a):*

$$\left| A \setminus \bigcup_{k=1} S_k \right| = 0.$$

Zauważmy, że twierdzenie to może być wykorzystane do udowodnienia następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3 (Twierdzenie Lebesgue'a o punktach gęstości).
Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Wówczas dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ i dla dowolnego ciągu kostek $\{Q_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ o środkach w x i średnicach zbieżnych do zera zachodzi równość:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|Q_k(x) \cap M|}{|Q_k(x)|} = \chi_M(x),$$

gdzie $\chi_M(x)$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru M.[5]

[4] zob. twierdzenie 3.1 w podrozdziale trzecim rozdziału pierwszego monografii De Guzmána.
[5] zob. uwagę szóstą w podrozdziale trzecim rozdziału pierwszego monografii De Guzmána.

Zagadnienie 4 (Wariacje na temat klasycznego twierdzenia Riemanna o przegrupowaniu szeregów)**.**

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *będzie szeregiem o wyrazach rzeczywistych takim, że*

$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \min\{0, x_n\} = -\infty$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{0, x_n\} = \infty$. $(*)$

Uwaga 3. *Zwyczajowo zamiast warunków* $(*)$ *przyjmuje się, że szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *jest warunkowo zbieżny, co jak okaże się z przedstawionego twierdzenia Riemanna, mimo, że sformułowane jest silniej niż warunki* $(*)$ *(dodatkowo żądamy tu zbieżności szeregu* $\sum x_n$*) w gruncie rzeczy jest równoważne warunkom* $(*)$*.*

Twierdzenie 4 (Twierdzenie Riemanna o przegrupowaniu szeregów)**.**
Warunki $(*)$ *implikują, że dla dowolnego przedziału domkniętego i niepustego* $I \subseteq [-\infty, \infty]$ *istnieje permutacja* $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, taka że zbiorem punktów skupienia* σ*-przegrupowanego szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$*, tj. szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$*, jest przedział* I*.*

Nie ukrywamy, że twierdzenie to rozbudziło naszą (tj. autora i R. Wituły – opiekuna projektu) wenę twórczą i błyskawicznie doprowadziło nas do sformułowania następującej ogólniejszej wersji tego „klasyka”:

Twierdzenie 5 (M. Szweda, R. Wituła)**.**
Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *będzie szeregiem o wyrazach rzeczywistych, takim że istnieją podciągi* $\{x_{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *oraz* $\{x_{s_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *spełniające warunki:*

$$x_{r_s} < 0 < x_{s_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{s_n} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{r_n} = -\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_{s_n} = \infty.$$

Niech $I \subseteq [-\infty, \infty]$ *będzie przedziałem domkniętym, takim że:*

$$\limsup |x_n| \leqslant \operatorname{length}(I).$$

Wówczas istnieje permutacja $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, taka że zbiorem punktów skupienia szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ *jest przedział* I*.*

Dowód.
Przedstawimy teraz szkic dowodu tego twierdzenia. Dowód jest uogólnieniem dowodu klasycznego twierdzenia Riemanna o szczegóły techniczne, pozwalające „niwelować” elementy podciągu:

$$\{x_{t_n}\} := \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \setminus \big(\{x_{r_n}\}_{n=1}^{\infty} \cup \{x_{s_n}\}_{n=1}^{\infty}\big).$$

Jest to zresztą niezbędne jedynie w przypadku, gdy założymy, że ciąg ten jest nieskończony, czyli gdy mamy $\{x_{t_n}\}_{n=1}^{\infty}$.
Należy też rozważyć przypadki ze względu na postać przedziału I. Dla przykładu, niech $I=[\alpha,\beta],\ -\infty<\alpha<\beta<\infty$. Oznaczmy:

$$T_+ := \{x_{t_n}:\ x_{t_n}\geqslant 0\},\qquad T_- := \{x_{t_n}:\ x_{t_n}<0\},$$

$$R=\{x_{r_n}\}_{n=1}^{\infty},\qquad S=\{x_{s_n}\}_{n=1}^{\infty}.$$

Założymy też że zbiory (ciągi) T_+ i T_- są nieskończone.
Najpierw wybieramy kolejne elementy ciągu S do momentu, gdy ich suma przekroczy wartość β, bierzemy pierwszy element z T_- i dodajemy, gdy to niezbędne, odpowiednią ilość kolejnych elementów z R, tak by suma wszystkich wybranych elementów była mniejsza od α. Następnie dodajemy pierwszy element z T_+ i, gdy to niezbędne, odpowiednią ilość kolejnych elementów z S, tak by suma wszystkich dotąd wybranych elementów była większa niż β. Bierzemy drugi element z T_- i dodajemy, gdy to niezbędne, odpowiednią ilość kolejnych elementów z R, tak by uzyskana suma była mniejsza od α. Procedurę kontynuujemy indukcyjnie. Zauważmy, że otrzymane w ten sposób przegrupowanie szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ określone jest jednoznacznie i spełnia tezę twierdzenia. □

Uwaga 4. *W przedstawionym powyżej dowodzie „wyczerpywanie" następuje w dwóch momentach:*

- *w trakcie eliminowania elementów zbiorów T_+, T_-, R oraz S,*
- *w trakcie pokrywania przedziału $I=[\alpha,\beta]$ (procedura pokryć powoduje, że kolejne pokrycia będą coraz mniej wystawać ponad przedział I, tj. coraz bardziej zbliżać się od dołu do α i od góry do β).*

Uwaga 5. *Z twierdzeniem 5 wiąże się m.in. następujące twierdzenie udowodnione przez Wacława Sierpińskiego w 1911 roku.*

Twierdzenie 6.
Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym i niech $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha<\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n<\beta$. Wówczas istnieją permutacje σ i δ na $\mathbb{N}$, takie że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}=\alpha,\quad \sum_{n=1}^{\infty} x_{\delta(n)}=\beta,$$

a ponadto σ zawężone do zbioru $\{n\in\mathbb{N}\colon x_n<0\}$ jest identycznością oraz δ zawężone do zbioru $\{n\in\mathbb{N}\colon x_n>0\}$ jest identycznością.

(Powyższe twierdzenie przedstawione jest również w I tomie ponadczasowego dzieła George'a Polyi i Gabora Szegő: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, Springer, 1964; zobacz też prace: W. Wilczyński, *On the Riemann derangement theorem*, Słupskie Prace Mat.-Fiz. 4 (2007), 79-82;

R. Filipów, P. Szuca, *Rearrangement of conditionally convergent series on a small set*, J. Math. Anal. Appl. 362 (2010), 64-71).
Dowód twierdzenia 6 również można przeprowadzić z wykorzystaniem „metody wyczerpywania”.

Uwaga 6. *Tematyka uogólnień twierdzenia Riemanna o przegrupowaniach szeregów i metody wyczerpywania jako metody dowodzenia takich twierdzeń występuje w wielu pracach, różnych autorów. Odnotujemy tu jeszcze kilka z nich:*

F. Prus-Wiśniowski, Two refinements of the Riemann Derangement Theorem, *165-172, w „Real Functions, Density Topology and Related Topics”. A volume dedicated to W. Wilczyński (ed. M. Filipczak & E. Wagner-Bojakowska), Łódź University Press, Łódź 2011;*

R. Wituła, Certain multipler version of the Riemann derangement theorem, *Demonstratio Math. 47 No 1 (2014), 125-129;*

R. Wituła, The family $\mathfrak{F}$ of permutations of $\mathbb{N}$, *Mathematica Slovaca (będzie opublikowana prawdopodobnie w 2016 roku).*

Uwaga 7. *W trakcie dyskusji z Michałem Różańskim*[6] *założeń twierdzenia 5 zauważyliśmy jeszcze następujące twierdzenia:*

Twierdzenie 7 (M. Różański, M. Szweda, R. Wituła)**.**
Niech $x_n > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. *Jeśli* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \infty$, *to dla każdego* $\alpha \in (0, \infty]$ *istnieje podciąg* $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *taki, że* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n} = \alpha$.

Dowód tego twierdzenia sprowadza się do „wyczerpywania” różnicy pomiędzy konstruowanymi sumami częściowymi, a oczekiwaną sumą α.

Twierdzenie 8 (S. Kakeya[7])**.**
Niech $x_n > 0,\ n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. *Niech* $s := \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n < \infty$. *Wówczas dla każdego* $\alpha \in (0, s)$ *istnieje podciąg* $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *taki, że* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{k_n} = \alpha$ *wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$x_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k, \tag{2}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

[6] Podobnie jak autor jest on obecnie studentem II roku studiów matematyki II stopnia na naszym Wydziale – przyp. Roman Wituła.

[7] Zobacz zwłaszcza bardzo aktualną pracę przeglądową Artura Bartoszewicza, Małgorzaty Filipczak i Franciszka Prus-Wiśniowskiego, *Topological and algebraic aspects of subsums of series*, 345-366,w monografii pod tytułem: *Traditional and present – day topics in real analysis*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 2013, dedykowanej Profesorowi Janowi Stanisławowi Lipińskiemu.

Dowód dostateczności warunku (2) przebiega podobnie jak anonsowany dowód twierdzenia 7 przez „wyczerpywanie” różnicy między liczbą α, a sumami częściowymi wybieranych elementów podciągu $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

Uwaga 8. *Warto zauważyć, że twierdzenie 8 było odkrywane niezależnie przez wielu autorów, np. H. Hornich,* Über beliebige Teilsummen absolut konvergenter *Reihen, Monatshefte für Mathematik und Physik 49 (1941), 316-320.*
Jednak uogólnienie tego twierdzenia na szeregi w abelowych grupach topologicznych Hausdorffa przedstawił już tylko jeden znany nam matematyk: R. Niechajewicz w swojej pracy pod tytułem: A theorem on subseries, *Bulletin De L'Academie Polonaise des Sciences 23 No 10 (1975), 1069-1071.*

Twierdzenie 9.
Dla każdego $\alpha > 0$ istnieje ciąg $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ niemalejący liczb dodatnich taki, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{w_n}} = \alpha.$$

W szczególności, jeśli dla danego $w > 1$ mamy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^w} > \alpha$, to można założyć, że $w_1 = w$.

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić również „wyczerpując” różnicę pomiędzy α i kolejnymi sumami $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{w_n}}$, $N \in \mathbb{N}$.
Uogólnienia twierdzenia 9 można znaleźć w pracy:
R. Wituła, D. Słota, *On some new subfamilies of classical l^p space*, Tatra Mt. Math. Publ. 49 (2011), 27-48.

Zagadnienie 5 (Twierdzenia aproksymacyjne w przestrzeniach unormowanych)**.**
Przykładem mogą być twierdzenia udowodnione w pracach [1] i [2]:

Twierdzenie 10.
Niech $(\mathbb{X}, ||\cdot||)$ będzie rzeczywistą przestrzenią unormowaną, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{X}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||a_n|| < \infty$ i niech $x \in \mathbb{X}$, $x \neq \mathbf{0}_{\mathbb{X}}$. Jeśli spełnione są następujące warunki:

1. *dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i dla dowolnych $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, jeśli $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, to $a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} \neq x$,*

2. *dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończony podciąg $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}\}$ taki, że:*

$$||x - \sum_{i=1}^{k} a_{n_i}|| < \varepsilon,$$

to istnieje podciąg $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ taki, że $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = x$.

Uwaga 9. *Ignorując warunek 1. i zastępując nierówność ostrą w warunku 2. przez odpowiednią nierówność słabą, otrzymujemy odpowiednio zmienioną tezę: albo istnieje skończony ciąg* $\{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}\}$ *taki, że* $a_{n_1} + a_{n_2} + \ldots + a_{n_k} = x$ *albo istnieje podciąg nieskończony* $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ *taki, że* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = x$.

Twierdzenie 11. *Niech* $a_n \geqslant 0,\ n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ *i niech* $\mathcal{W}$ *będzie rodziną wszystkich nieskończonych podciągów ciągu* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Niech* $x > 0$. *Jeśli dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *istnieje ciąg* $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{W}$ *taki, że:*

$$x - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} < x,$$

to również istnieje ciąg $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{W}$ *taki, że* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = x$. *Ponadto, dla każdego* $y \in \left(0, \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n\right)$ *istnieje ciąg* $\{a_{n_i}\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{W}$ *spełniający warunek:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} : \{a_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{W} \text{ oraz } \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_k} < y\right\},$$

(tym razem warunek $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ *może być pominięty).*

Uwaga końcowa. *Wiele dowodów, wielu faktów analizy funkcjonalnej, zwłaszcza tych dotyczących ciągów i szeregów w przestrzeniach unormowanych prowadzonych jest metodą wyczerpywania. Prawdziwą kopalnią takich dowodów i faktów jest np. monografia Josepha Diestela [3].*

Literatura

[1] R. Wituła, E. Hetmaniok, K. Kaczmarek, D. Słota, *On certain approximation problem in normed spaces*, 368 - 372, (2014) in: AIP Conference Proceedings **1629**,

[2] R. Wituła, K. Kaczmarek, E. Hetmaniok, D. Słota, *On certain approximation problem connected with the sums of subseries*, Tatra Mt. Math. Publ. 55 (2013), 37-45,

[3] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer, 1984.