POLITECHNIKA ŚLĄSKA
WYDZIAŁ MATEMATYKI STOSOWANEJ
KIERUNEK: MATEMATYKA
Jakub Wrześniewski,
Piotr Witkowski,
Jakub Nowiński

REFERAT
Temat: Matematyczny związek praw Keplera z prawami Newtona

styczeń 2023 rok

opracowano na podstawie artykułu Andrew T. Hymana, *The mathematical relationship between Kepler's Laws and Newton's Laws*, Amer. Math. Monthly **100** No.10 (1993), 932-936.

Uwaga redakcyjna. Warto nadmienić, że prezentowane opracowanie w stosunku do oryginału zawiera wiele usprawnień technicznych i kilka dodatków, które znacząco wpływają na odbiór prowadzonych rozważań.

R. Wituła, A. Smuda

1. Wstęp

Za każdym razem, gdy pojawia się nowa teoria naukowa, wita ją grono sceptyków domagając się dowodu, że jest ona równie dobra, jak teoria, którą mogłaby zastąpić. Dlatego „głównym problemem naukowym XVII wieku" było udowodnienie, że prawo grawitacji Izaaka Newtona pozwala wyprowadzić takie same wnioski, jak starsze prawa Johannesa Keplera. Ten słynny onegdaj matematyczny problem został rozwiązany poniżej w innowacyjny sposób bez użycia trygonometrii oraz żadnej ze „sprytnych sztuczek analitycznych", a jedynie za pomocą elementarnego rachunku różniczkowego i całkowego.

Zakładając, że planety poruszają się zgodnie z prawami Keplera (które omówiono w rozdziale drugim), można wyprowadzić wzór na przyśpieszenie planetarne zwane centralnym równaniem odwrotności kwadratów Newtona (zob. wzór (12) poniżej). Wzór ten odkrył po raz pierwszy Newton. Prawo grawitacji Newtona zostanie udowodnione w prosty i bezpośredni sposób w rozdziale trzecim. Twierdzenie odwrotne, zgodnie z którym centralne równanie $1/R^2$ implikuje istnienie orbit keplerowskich, zostało udowodnione w rozdziale czwartym.

Te dwa udowodnione tutaj twierdzenia zostały po raz pierwszy opublikowane przez Newtona w 1687 roku w traktacie naukowym *Matematyczne zasady filozofii naturalnej* (łac. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, w skrócie *Principia*). Newton przyznał, że dzieło to jest celowo „zawiłe", stąd też cały czas trwa spór dotyczący słuszności przedstawionych przez niego dowodów. W przeciwieństwie do *Principii*, poniższe krótkie dowody sygnalizowanych twierdzeń są dość przejrzyste.

Prawa Keplera są "różniczkowane" w rozdziale trzecim przy użyciu jedynie współrzędnych kartezjańskich. To nowatorskie podejście kontrastuje ze standardową techniką przekształcania odpowiednich równań do współrzędnych biegunowych. Chociaż dowód twierdzenia odwrotnego w rozdziale 4 jest zasadniczo taki sam, jak dowody podane przez kilku innych autorów, więc wydaję się, że każdy krok w rozdziale 4 następuje naturalnie, wynikając z poprzedzających go spostrzeżeń. Metoda z rozdziału 4 jest przedstawiona w sposób klarowny, który korzystnie wypada w porównaniu z bardziej powszechnymi sposobami dowodzenia twierdzenia odwrotnego.

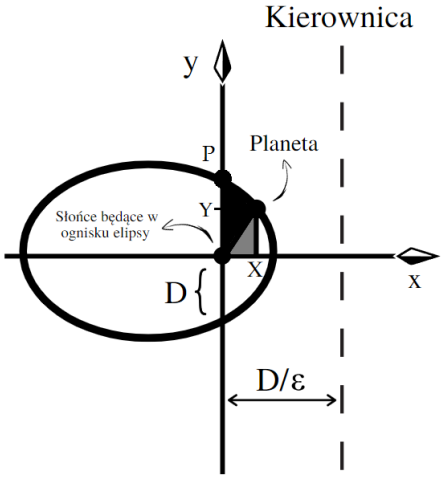
2. Przegląd praw Keplera

Kepler wywnioskował swoje prawa korzystając z danych dostarczonych przez duńskiego astronoma Tychona Brahego (zob. [1]). Brzmią one następująco:

- Każda planeta Układu Słonecznego porusza się po orbicie w kształcie elipsy, a Słońce znajduje się w jednym z ognisk tej elipsy.
- Odcinek łączący planetę ze Słońcem, czyli promień wodzący planety, zakreśla obszary o jednakowych polach powierzchni w równych odstępach czasu.
- Kwadrat okresu ruchu planety po orbicie, podzielony przez sześcian długości półosi wielkiej tej orbity daje tę samą wartość dla wszystkich planet.

Dwa pierwsze prawa zostały przedstawione w książce Keplera *Astronomia Nova*, która została opublikowana w 1609 roku. Natomiast trzecie prawo (tzw. prawo harmoniczne) zostało zaproponowane w 1619 roku w książce *Harmonice Mundi*. Odkrycie tych praw było największym osiągnięciem w astronomii od czasów, kiedy dziewiętnaście wieków wcześniej Arystarch (grecki astronom) wywnioskował, że planety krążą wokół Słońca.

Elipsy to oczywiście krzywe zamknięte powstałe w wyniku przecięcia stożka przez płaszczyzny przecinające oś stożka. Badane były już przez starożytnych Greków, którzy udowodnili, że odległość dowolnego punktu P elipsy od jej ogniska podzielona przez odległość tego punktu od jej kierownicy jest wielkością stałą, którą tradycyjnie oznaczamy przez ε i nazywamy mimośrodem (na rysunku poniżej jako P wybrano odpowiedni punkt przecięcia elipsy przez oś OY). Piękny dowód tej własności, nazywanej własnością ognisko-kierownica, został opracowany w 1822 roku przez G. P. Dandelina. Znajduje on zastosowanie zarówno dla krzywych stożkowych zamkniętych ($0 \leqslant \varepsilon < 1$) jak i otwartych ($\varepsilon \geqslant 1$).



Prawa Keplera można przełożyć na równania poprzez przedstawienie położenia planety jako punktu na płaszczyźnie Oxy, o współrzędnych (X, Y) po upływie czasu t (patrz rysunek). Słońce znajduje się w punkcie $(0, 0)$ (początek układu współrzędnych), a kierownica planety jest prostopadła do osi x i znajduje się w odległości D/ε od Słońca. Wartość D nazywamy

„semi-latus-rectum” krzywej stożkowej. Zgodnie z pierwszym prawem Keplera wykorzystując pojęcie mimośrodu elipsy odległość euklidesowa $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ planety od Słońca dana jest wzorem:

$$R = D - \varepsilon X. \tag{1}$$

Drugie prawo Keplera można sformułować podobnie, w równie prosty sposób. Jeśli planeta osiąga oś y w czasie t_0, to obszar zakreślony przez promień wodzący planety pomiędzy czasem t i t_0 jest równy różnicy mnogościowej obszaru pod krzywą oraz trójkątnego obszaru znajdującego się poniżej prostej przechodzącej przez Słońce i planetę po czasie t (patrz rysunek). Na tej podstawie otrzymujemy równanie

$$\int_0^X y\, dx - \frac{XY}{2} = C(t - t_0), \tag{2}$$

gdzie C jest stałym stosunkiem pola zakreślonego obszaru do czasu, który upłynął (nowa stała t_0 musi zostać wprowadzona za każdym razem, gdy planeta przecina oś x).

Całkowite pole obszaru ograniczonego przez orbitę podzielone przez czas trwania ruchu jest oczywiście równe C. Nietrudno też udowodnić, że pole elipsy wynosi πab, gdzie $a = D\left[1 - \varepsilon^2\right]^{-1}$ oraz $b = D\left[1 - \varepsilon^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ oznaczają długości obydwu półosi elipsy (te dwie zależności można łatwo wyprowadzić wykorzystując zależność (1)).[1]

Trzecie prawo Keplera brzmi następująco:

$$\frac{C^2}{D} = K, \tag{3}$$

[1] Ze wzoru (1) dla punktu $\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ orbity dostajemy:

$$a - \sqrt{a^2 - b^2} = D - \varepsilon\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right),$$

$$D = a(1 + \varepsilon)\left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}\right),$$

przy czym ze znanej zależności dla mimośrodu $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, dostajemy:

$$a = \frac{D}{1 - \varepsilon^2},$$

a następnie

$$\varepsilon^2 = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 - \frac{b^2(1 - \varepsilon^2)^2}{D^2},$$

$$\frac{b^2(1 - \varepsilon^2)^2}{D^2} = 1 - \varepsilon^2,$$

$$b^2 = \frac{D^2}{1 - \varepsilon^2},$$

$$b = \frac{D}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

gdzie stała „K” jest taka sama dla wszystkich planet.
Podsumowując, prawa Keplera przyjmują postać równań odpowiednio (1), (2) i (3).

3. Dowód równania centralnego $1/R^2$

Użyjemy teraz praw Keplera do wyznaczenia przyśpieszenia planety. Różniczkując R otrzymujemy:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\sqrt{X^2+Y^2} = \frac{X\frac{dX}{dt} + Y\frac{dY}{dt}}{\sqrt{X^2+Y^2}} = \frac{1}{R}\left[X\frac{dX}{dt} + Y\frac{dY}{dt}\right] \overset{(1)}{=} -\varepsilon\frac{dX}{dt}. \quad (4)$$

Teraz różniczkując (2) oraz korzystając z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego, dostajemy:

$$y(X)\frac{dX}{dt} - \frac{1}{2}\left[Y\frac{dX}{dt} + X\frac{dY}{dt}\right] = C, \quad (5)$$

skąd po uwzględnieniu $y(X) = Y$ znajdujemy:

$$Y\frac{dX}{dt} - X\frac{dY}{dt} = 2C. \quad (6)$$

Z równań (4), (6) i (1), po wykonaniu prostych przekształceń algebraicznych otrzymujemy dwie składowe wektora prędkości planety:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{2C}{D}\cdot\frac{Y}{R} \quad (7)$$

oraz

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{2C}{D}\cdot\frac{X}{R} - \frac{2C\varepsilon}{D}. \quad (8)$$

Teraz różniczkujemy równanie (6):

$$Y\frac{d^2X}{dt^2} - X\frac{d^2Y}{dt^2} = 0. \quad (9)$$

Różniczkując (7) oraz wykorzystując równania (6) i (3) otrzymujemy:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{2C}{D}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{Y}{R}\right] = \frac{2C}{D}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right] =$$

$$= \frac{2C}{D}\left[\frac{(X^2+Y^2)\frac{d}{dt}Y - Y\left[X\frac{dX}{dt} + Y\frac{dY}{dt}\right]}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{2C}{D}\cdot\frac{X^2\frac{dY}{dt} - XY\frac{dX}{dt}}{R^3} = \frac{2C}{D}\cdot\frac{(-2CX)}{R^3} = \frac{-4KX}{R^3},$$

czyli

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{-4KX}{R^3}. \tag{10}$$

Ze względu na symetrie (można zamienić rolami X z Y przy różniczkowaniu $\frac{d}{dt}\left[\frac{X}{R}\right]$) dostajemy:

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{2C}{D}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{X}{R}\right] = -\frac{2C}{D}\cdot\frac{Y^2\frac{dX}{dt} - YX\frac{dY}{dt}}{R^3} \overset{(6)}{=} -\frac{2C}{D}\cdot\frac{2CY}{R^3} = \frac{-4KY}{R^3},$$

czyli

$$\frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{-4KY}{R^3}. \tag{11}$$

Wzór ten można też wyprowadzić z (9) i (10)

Równania (10) i (11) można zapisać w sposób zwięzły wykorzystując zapis wektorowy $\vec{R} = [X, Y]$:

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \frac{-4K\vec{R}}{R^3}. \tag{12}$$

Równanie (12) jest centralnym równaniem odwrotności kwadratów Newtona. To równanie wyraża prawo grawitacji Newtona dla szczególnego przypadku, w którym masa planetarna jest znikoma (pomijalna).

4. Tworzenie praw Keplera

Sformułujmy teraz następujący problem, czy ograniczona orbita jeśli nie jest keplerowska, to może spełniać równanie (12)? Mówiąc inaczej, czy planeta może przyspieszać zgodnie z warunkiem (12) i nie spełniać przy tym praw Keplera? Udowodnimy, że istnienie takiej orbity jest niemożliwe, poprzez odtworzenie praw Keplera z (12). Dodajmy jeszcze tylko, że przyjmuje się za pewnik, iż ruch planety odbywa się w płaszczyźnie (chociaż jest to łatwe do uzasadnienia).

Równania (10) i (11) prowadzą do (9), a całkowanie przez części (9) daje (6) a następnie (2). Podstawienie zależności (6) do kluczowej tożsamości:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{Y}{R}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right] = \frac{X}{R^3}\left[X\frac{dY}{dt} - Y\frac{dX}{dt}\right] \tag{13}$$

daje:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{Y}{R}\right] = \frac{-2CX}{R^3}. \tag{14}$$

Ze względu na (14) i (10) otrzymujemy

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{Y}{R}\right] = \frac{C}{2K}\cdot\frac{d^2X}{dt^2},$$

$$\frac{Y}{R} = \frac{C}{2K} \cdot \frac{dX}{dt} + A, \tag{15}$$

gdzie A jest stałą całkowania.

Zamieniając rolami X i Y we wzorze (13) dostajemy kolejną tożsamość, która
w połączeniu z (6) daje:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{X}{R}\right] = \frac{2CY}{R^3}. \tag{16}$$

Teraz korzystając z (11) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{X}{R}\right] = -\frac{C}{2K} \cdot \frac{d^2Y}{dt^2},$$

$$\frac{X}{R} = \frac{-C}{2K} \cdot \frac{dY}{dt} + B, \tag{17}$$

gdzie B jest kolejną stałą. Podstawiając (15) i (17) do warunku (6) dostajemy:

$$\frac{C^2}{K} + AY + BX = R. \tag{18}$$

Jeżeli $A = B = O$, to powyższa równość opisuje okrąg. W przeciwnym przypadku równanie (18) opisuje krzywą stożkową z ogniskiem będącym początkiem układu współrzędnych, mimośrodem wynoszącym $\left[A^2 + B^2\right]^{\frac{1}{2}}$ oraz kierownicą określoną wzorem:

$$\frac{C^2}{K} + Ay + Bx = 0. \tag{19}$$

Taka interpretacja równania (18) wynika z prostego faktu geometrii analitycznej, że odległość punktu (x_o, y_o) od prostej $ax + by + c = O$ jest równa

$$|ax_o + by_o + c| \left[a^2 + b^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ten dobrze znany fakt[2] można również zastosować do równości (19) w celu znalezienia odległości ogniska od kierownicy. Zatem oczywiste jest to, że odległość "ognisko-kierownica" jest zgodna ze wzorem (3). W konsekwencji, jeśli centralne równanie odwrotności kwadratów Newtona jest prawdziwe, to wszystkie ograniczone orbity muszą spełniać prawa Keplera, co należało udowodnić.

[2] Po wszystkie wykorzystane tu twierdzenia geometrii analitycznej odsyłamy zainteresowanego Czytelnika do podręcznika [2]

Literatura

[1] John North, Historia astronomii i kosmologii, Wyd. Książnica, Katowice, 1997
[2] Franciszek Leja, Geometria analityczna, PWN, Warszawa