Niewymierność liczby $\zeta(3)$

opracowali:
Aneta Nowara
Roman Wituła
Dominika Datko
Michał Cyroń
Marcin Jochlik
Kamil Krawczyk

Prezentowany tutaj „tekst” stanowi skomentowane opracowanie artykułu Dirka Huylebroucka [1]. Problem niewymierności liczb $\zeta(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, w porównaniu z burzliwą, liczącą około 2000 lat, historią liczby π jest stosunkowo młody. Jego narodziny lokujemy w XVIII wieku, erze Eulera, który osobiście atakował ów problem wielokrotnie, jednak bezskutecznie. Pierwszy przełom nastąpił dopiero w 1978 roku za sprawą Rogera Apéry'ego, znanego dziś matematyka francuskiego, który udowodnił niewymierność liczby $\zeta(3)$. Dowód Apéry'ego uchodzi za niesamowity, ulotny i w pierwszym odruchu wydaje się, że niewiele wnosi do samego problemu poznania natury liczb $\zeta(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$. Dopiero późniejsze wyniki takich matematyków jak F. Beukers, T. Apostol, D. Kalman, T. Rivoal, pozwoliły „ucywilizować” dowód niewymierności liczby $\zeta(3)$.

Okazuje się, że aktualne podejście do zagadnienia niewymierności tej liczby rozwiązuje równocześnie kilka innych problemów niewymierności znanych liczb rzeczywistych. Punktem wyjścia przedstawianego podejścia jest reprezentacja całkowa rozważanych liczb: π, $\ln 2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}/k = 0,693147\ldots$,
$\zeta(2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = 1,64493\ldots$ oraz

$$\zeta(3) = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^3 = 1,20205\ldots$$

I tak, mamy

$$\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\, dxdy =$$

(gdzie tak naprawdę rozważamy całkę niewłaściwą[1]:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[0,1]^2 \setminus [1-\varepsilon,1]^2} \frac{1}{1-xy}\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[0,1-\varepsilon]^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k\right) dxdy\Bigg)$$

$$= \iint\limits_{[0,1]^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k\right) dxdy =$$

(stosujemy twierdzenie Tonellego)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^k dx \int_0^1 y^k dy =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{y^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2},$$

czyli

$$\zeta(2) = \iint\limits_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\,dxdy. \tag{1}$$

Podobnie znajdujemy zależność całkową dla $\zeta(3)$:

$$\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy} \ln(xy)\,dxdy =$$

(tym razem rozważamy całkę niewłaściwą[2]:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1]^2 \setminus [1-\varepsilon,1]^2} \frac{1}{1-xy} \ln(xy)\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]^2} \frac{1}{1-xy} \ln(xy)\,dxdy\Bigg)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k \underbrace{\ln(xy)}_{\ln x + \ln y}\right) dxdy =$$

$$= 2 \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k \ln(x)\right) dxdy =$$

[1] Patrz Dodatek
[2] Patrz Dodatek

(stosujemy twierdzenie Tonellego)

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^k \ln(x)\,dx \int_0^1 y^k\,dy =$$

(dla całki z logarytmem wykonujemy całkowanie przez części)

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\left[x^{k+1}\ln(x)\right]_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} x^{k+1}\frac{1}{x}\,dx \right) \frac{1}{k+1} =$$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\left(-\frac{1}{k+1}\right)\frac{1}{k+1} = -2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)^3},$$

skąd mamy

$$\zeta(3) = -\frac{1}{2}\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ln(xy)\,dxdy. \tag{2}$$

Podkreślmy, że całki we wzorach (1) i (2), to całki niewłaściwe w sensie Riemanna. Z kolei:

$$\frac{2}{\pi} = \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx, \qquad \ln 2 = \int_0^1 \frac{dx}{x+1}.$$

Dalszy ciąg dowodu można zunifikować dla wszystkich czterech badanych tu liczb.

Załóżmy, że $\xi \in \mathbb{R}$ jest liczbą, o której chcemy udowodnić, że jest liczbą niewymierną. W każdym z badanych przez nas przypadków, będziemy dyskutować rodziny całek

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = R_n + S_n\xi^k, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ będzie odpowiednią funkcją całkowalną w sensie Riemanna w każdym przedziale domkniętym $[a,b] \subset (0,1)$, przyporządkowaną liczbie ξ, natomiast R_n, $S_n \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$. Zakładając nie wprost, przyjmijmy, że $\xi \in \mathbb{Q}$, czyli dla wskazanych powyżej całek otrzymujemy zależność:

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = C_n/D_n,$$

gdzie C_n, $D_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Stąd, jeśli $p_{nk} \in \mathbb{Z}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$, to:

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} p_{nk} x^k \right) f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} p_{nk} \int_0^1 x^k f(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} p_{nk} \frac{C_k}{D_k} \in \mathbb{Q},$$

Własność tę zastosujemy do wielomianów Legendre'a:

$$P_n(x) := \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \left(x^n (1-x)^n \right) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk} x^k;$$

zauważmy, że $p_{nk} \in \mathbb{Z}$, albowiem:

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = 1 - 2x, \quad P_2(x) = 1 - 6x + 6x^2,$$

a pozostałe przypadki rozważamy dowodem przez indukcję. Zatem:

$$\int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx = \frac{A_n}{B_n},$$

gdzie A_n, $B_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Wybór powyżej padł na wielomiany Legendre'a z powodów czysto technicznych, gdyż nasze całki można wówczas łatwo całkować przez części (i to n-krotnie), a mianowicie:

$$\int_0^1 P_n(x) f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{1}{n!} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^n (1-x)^n \right) \right) f(x)\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^n (1-x)^n \right) f(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^n (1-x)^n \right) \frac{d\, f(x)}{dx}\, dx =$$

$$= 0 - \int_0^1 \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(x^n (1-x)^n \right) \frac{d\, f(x)}{dx}\, dx,$$

co po n-krotnym całkowaniu przez części prowadzi do całki:

$$\int_0^1 \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n}\, dx.$$

We wszystkich czterech dyskutowanych poniżej przykładach całce tej będzie można nadać postać:

$$\int_0^1 \frac{1}{n!} (g(x))^n h_n(x)\, dx,$$

gdzie $g(x)$, to niekoniecznie wielomian $x(1-x)$, natomiast h jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna w przedziale $[0,1]$ i jeśli M będzie wartością maksymalną funkcji $|g|$ w przedziale $[0,1]$, to:

$$\left|\int_0^1 \frac{1}{n!}(g(x))^n h_n(x)\,dx\right| \leqslant \frac{M^n}{n!}\int_0^1 h_n(x)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

jeśli tylko założymy, że $\left|\int_0^1 h_n(x)\,dx\right| \leqslant m^n$ dla pewnego $m > 1$.

Stąd, w szczególności otrzymujemy:

$$1 \leqslant |A_n| = \left|B_n \int_0^1 P_n(x)f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\frac{B_n}{4^n n!}\int_0^1 h_n(x)\,dx\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

o ile $\frac{B_n m^n}{4^n n!} \to 0$ gdy $n \to \infty$, gdzie $m > 0$ spełnia wspomniany powyżej warunek:

$$\left|\int_0^1 h_n(x)\,dx\right| \leqslant m^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Oczywiście jest to niemożliwe i w konsekwencji jest sprzeczne z założeniem, że ξ jest liczbą wymierną.

Przejdźmy do analizy konkretnych przypadków.

Liczba π. Weźmy $f(x) = \sin(\pi x)$. Wówczas całki

$$\int_0^1 x^k \sin \pi x\,dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

są wielomianami zmiennej $1/\pi$ o współczynnikach całkowitych odpowiednio stopnia k-tego, gdy k jest nieparzyste oraz $(k+1)$-szego gdy k jest parzyste. Stąd także całki $\int_0^1 P_n(x)\sin \pi x\,dx$ są wielomianami zmiennej $1/\pi$ o współczynnikach całkowitych, stopnia $\leqslant n+1$. Ale

$$\left|\int_0^1 P_n(x)\sin \pi x\,dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n\frac{d^n}{dx^n}(sin\pi x)\,dx\right| =$$

$$\begin{cases} = 0 \text{ gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \\ > 0 \text{ gdy } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

Zatem, gdyby π było liczbą wymierną, $\pi = a/b$, to dla parzystych $n \in \mathbb{N}$, mielibyśmy:

$$\int_0^1 P_n(x) \sin \pi x \, dx = \frac{A_n}{a^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $A_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ oraz

$$1 \leqslant |A_n| = \left| a^{n+1} \int_0^1 P_n(x) \sin(\pi) x \, dx \right| =$$

$$= \left| a^{n+1} \int_0^1 \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n} \sin \pi x \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| a^{n+1} \int_0^1 \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \pi^n \, dx \right|,$$

gdyż pochodna n-tego rzędu z $\sin(\pi x)$ jest równa albo $\pm \pi^n \sin(\pi x)$, gdy $n \in 2\mathbb{N} - 1$, albo $\pm \pi^n \cos(\pi x)$, gdy $n \in 2\mathbb{N}$. Maksymalna wartość wielomianu $x(1-x)$ w przedziale $[0,1]$ jest równa $1/4$ (jest osiągnięta dla $x = 1/2$). Tym samym, majoranta $|A_n|$ ma postać:

$$\left| a \frac{\left(\frac{a\pi}{4}\right)^n}{n!} \right|$$

i dąży do zera, gdy $n \to \infty$, tak jak oczekiwaliśmy. Liczba π musi więc być niewymierna.

Liczba $\ln 2$**.** Przyjmijmy teraz $f(x) = 1/(x+1)$. Wówczas znajdujemy:

- gdy k jest nieparzyste:

$$\int_0^1 \frac{x^k}{1+x} \, dx = \int_0^1 \frac{(x^k+1)-1}{x+1} \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^l x^l \right) - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l+1} \right) - \ln 2;$$

- gdy k jest parzyste, to:

$$\int_0^1 \frac{x^k}{1+x} \, dx = \int_0^1 \frac{(x^k-1)+1}{x+1} \, dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left(\sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{l-1} x^l \right) + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^{l-1}}{l+1} \right) + \ln 2.$$

Innymi słowy, mamy:

$$\int_0^1 \frac{x^k}{1+x}\, dx = (-1)^{k-1} \left[\left(\sum_{l=0}^{k-1} \frac{(-1)^l}{l+1} \right) - \ln 2 \right], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ponadto zauważmy, że:

$$\left| \int_0^1 P_n(x) \frac{1}{1+x}\, dx \right| = \left| \int_0^1 \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x+1} \right) dx \right| =$$

$$= \int_0^1 x^n (1-x)^n \frac{dx}{(1+x)^{n+1}} > 0,$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem, jeśli założymy, że $\ln 2$ jest liczbą wymierną, tj. $\ln 2 = a/b$, to

$$\int_0^1 P_n(x) \frac{1}{x+1}\, dx = \frac{A_n}{bd_n} \neq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

gdzie $A_n \in \mathbb{Z}$, natomiast $d_n := \mathrm{NWW}\{1, 2, ..., n+1\}$ i otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$1 \leqslant |A_n| = \left| bd_n \int_0^1 P_n(x) \frac{1}{1+x}\, dx \right| \leqslant \left| bd_n \int_0^1 \left(\frac{x(1-x)}{1+x} \right)^n \frac{dx}{1+x} \right|.$$

Można udowodnić, że $d_n \leqslant 3^{n+1}$ (zob. [2]).

Z kolei:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x(1-x)}{1+x} \right) = \frac{2-(1+x)^2}{(1+x)^2},$$

skąd mamy:

$$\max_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{x(1-x)}{1+x} \right\} = \left. \frac{x(1-x)}{1+x} \right|_{x=\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}-1)^2.$$

Ostatecznie dostajemy:

$$1 \leqslant |A_n| \leqslant |bd_n (\sqrt{2}-1)^{2n} \ln 2| \leqslant 3a(3(3-2\sqrt{2}))^n \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

gdyż $3(3-2\sqrt{2}) = 0,515... < 1$, co dowodzi niewymierności liczby $\ln 2$.

Liczba $\zeta(2)$. Tym razem rozważmy funkcje:

$$f_n(x) = \int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-xy}\,dy, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas dostajemy:

$$\int_0^1 x^k \left[\int_0^1 \frac{(1-y)^n}{1-xy}\,dy\right] dx = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \iint_{[0,1]^2} \frac{x^k y^r}{1-xy}\,dxdy,$$

przy czym występujące tu całki

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{x^k y^r}{1-xy}\,dxdy,$$

po podzieleniu $x^k y^r$ przez $1-xy$ redukują się do skończonych sum całek postaci:

$$\iint_{[0,1]^2} x^p y^q\,dxdy, \qquad \iint_{[0,1]^2} \frac{x^p}{1-xy}\,dxdy,$$

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{y^q}{1-xy}\,dxdy, \qquad \iint_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\,dxdy.$$

Ostatnia całka, jak już wiemy, jest równa $\zeta(2)$, natomiast druga i trzecia redukują się ostatecznie do całek postaci:

$$\int_0^1 x^m \ln x\,dx.$$

Stąd wynika, że jeśli $k \neq r$, to całka:

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{x^k y^r}{1-xy}\,dxdy, \quad k, r \leqslant n,$$

jest sumą liczb wymiernych, takich, że:

$$\text{NWW ich mianowników} \leqslant (\text{NWW}\{1, 2, ..., n+1\})^2 = d_{n+1}^2$$

oraz, co tu istotne d_{n+1}^2 jest całkowitą krotnością NWW tych mianowników. W przypadku, gdy $k = r$, to

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{(xy)^k}{1-xy}\,dxdy = \iint_{[0,1]^2} \left(\sum_{l \geqslant k} (xy)^l\right) dxdy =$$

$$= \sum_{l \geqslant k} \iint\limits_{[0,1]^2} (xy)^l \, dxdy = \sum_{l \geqslant k+1} \frac{1}{l^2} = \zeta(2) - \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l^2}.$$

Podsumowując mamy:

$$\left| \int\limits_0^1 P_n(x) f_n(x) \, dx \right| = \frac{|A_n|}{d_{n+1}^2},$$

gdzie $A_n \in \mathbb{Z}_0$. Stąd

$$|A_n| = \left| d_{n+1}^2 \int\limits_0^1 P_n(x) f(x) \, dx \right| =$$

$$= \left| d_{n+1}^2 \int\limits_0^1 \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^n}{1-xy} dy \right) dx \right| =$$

$$= \left| d_{n+1}^2 \int\limits_0^1 \frac{1}{n!} x^n (1-x)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(\int\limits_0^1 \frac{n! y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}} dy \right) dx \right| =$$

$$= \left| d_{n+1}^2 \iint\limits_{[0,1]^2} \left(\frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \right)^n \frac{1}{1-xy} \, dxdy \right|,$$

a z postaci funkcji podcałkowej ostatniej całki wynika, że $|A_n| \neq 0$, czyli $|A_n| \geqslant 1$. Zauważmy, że

$$0 \leqslant \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} = \frac{2xy(1-x)(1-y)}{(1-x)(1+y)+(1+x)(1-y)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{xy(1-x)(1-y)}{\sqrt{(1-x)(1+y)(1+x)(1-y)}} = \frac{xy}{\sqrt{(1+x)(1+y)}} \sqrt{(1-x)(1-y)},$$

gdy $x, y \in [0,1)$, czyli że funkcja

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} & \text{gdy} \quad x, y \in [0,1), \\ 0 & \text{gdy} \quad x, y \in [0,1] \wedge (x = 1 \vee y = 1), \end{cases}$$

jest ciągła w kwadracie $[0,1] \times [0,1]$. Mamy

$$g'_x = y(1-y) \frac{1-2x+x^2y}{(1-xy)^2},$$
$$g'_y = x(1-x) \frac{1-2y+y^2x}{(1-xy)^2},$$

skąd wynika, że wartość maksymalna $g(x,y)$ w kwadracie $[0,1]\times[0,1]$ jest osiągnięta w punkcie (x,y), którego współrzędne spełniają warunek:

$$\begin{cases} 1-2x+x^2y=0 \\ 1-2y+y^2x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(x-y)+xy(x-y)=(x-y)(xy-2)=0 \\ 1-2y+y^2x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y \\ 1-2x+x^3=0 \end{cases}$$

przy czym

$$x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)=(x-1)\left(x-\frac{1}{\varphi}\right)(x+\varphi),$$

gdzie φ jest złotą proporcją, $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Zatem

$$\max_{[0,1]\times[0,1]}\{g(x,y)\}=g\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5,$$

i ostatecznie

$$1\leqslant|A_n|\leqslant d_{n+1}^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5n}\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{dxdy}{1-xy}\leqslant 9\left(9\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^5\right)^n\zeta(2)\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

albowiem po sprawdzeniu na kalkulatorze mamy $9(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^5=0.81152...$ Tym samym, wbrew założeniom, okazało się, że $\zeta(2)$ jest liczbą niewymierną.

Liczba $\zeta(3)$. Dobieramy następujące funkcje:

$$f_n(x)=\int\limits_0^1\frac{P_n(y)}{1-xy}\ln(xy)\,dy,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Wówczas całki

$$\int\limits_0^1 x^k\left[\int\limits_0^1\frac{P_n(y)}{1-xy}\ln(xy)\,dy\right]dx \tag{3}$$

obliczamy, różniczkując po parametrze t następujące całki

$$\iint\limits_{[0,1]^2}\frac{x^{r+t}y^{s+t}}{1-xy}\,dxdy, \tag{4}$$

co daje całki występujące w (3)

$$\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{x^{r+t}y^{s+t}}{1-xy} \ln(xy)\, dxdy. \tag{5}$$

Jak już wiemy z wcześniejszych rozważań dla $\zeta(2)$, jeśli $r \neq s$, to całki (4) są sumami liczb wymiernych z wyrażeniami postaci $(r+t)^m$ w mianowniku. Ponieważ mamy

$$\frac{d}{dt}(r+t)^{-m} = -m(r+t)^{-m+1},$$

więc podobnie będzie dla całek (5). W szczególności, gdy $r = s$, to całka (5) jest równa

$$\sum_{k>r} \frac{d}{dt}(k+t)^{-2} = -2\sum_{k>r}(k+t)^{-3} =$$

(gdy t dąży do liczby naturalnej lub gdy jest liczbą naturalną)

$$= -2\left(\zeta(3) - \sum_{k=1}^{r+t} k^{-3}\right).$$

Zatem:

$$\left|\int\limits_0^1 P_n(x)f(x)\, dx\right| = \frac{|A_n|}{|d_{n+1}^3|},$$

gdzie $A_n \in \mathbb{Z}$. Stąd dostajemy:

$$|A_n| = \left| d_{n+1}^3 \int\limits_0^1 P_n(x) \left[\int\limits_0^1 \frac{P_n(y)}{1-xy} \ln(xy)\, dy\right] dx \right| =$$

$$= \left| d_{n+1}^3 \iiint\limits_{[0,1]^3} \frac{P_n(x)P_n(y)}{1-(1-xy)z}\, dxdydz \right| =$$

(całkujemy przez części ze względu na x i to n-krotnie)

$$= \left| d_{n+1}^3 \iiint\limits_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n P_n(y) y^n z^n}{(1-(1-xy)z)^{n+1}}\, dxdydz \right| =$$

(podstawiamy w miejsce z nową zmienną $w = \frac{1-z}{1-(1-xy)z} = 1 - \frac{xyz}{1-(1-xy)z}$,

skąd wynikają zależności:

$\frac{x^n y^n z^n}{(1-(1-xy)z)^n} = (1-w)^n$, $z = \frac{1-w}{1-(1-xy)w}$, $dz = \frac{-xy\,dw}{(10(10xy)w)^2}$,

$\frac{dz}{1-(1-xy)z} = \frac{-xyw\,dw}{(1-z)(1-(1-xy)w)^2} = \frac{-dw}{1-(1-xy)w}$)

$$= \left| d_{n+1}^3 \iiint\limits_{[0,1]^3} \frac{(1-x)^n P_n(y)(1-w)^n}{1-(1-xy)w}\, dxdydw \right| =$$

(całkujemy przez części ze względu na y i to n-krotnie)

$$= \left| d_{n+1}^3 \iiint\limits_{[0,1]^3} \frac{x^n(1-x)^n y^n (1-y)^n w^n (1-w)^n}{(1-(1-xy)w)^{n+1}}\, dxdydw \right| =$$

$$= \left| d_{n+1}^3 \iiint\limits_{[0,1]^3} \left(\frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w} \right)^n \cdot \frac{1}{1-(1-xy)w}\, dxdydw \right|,$$

skąd wynika między innymi, że $|A_n| \neq 0$, tj. $|A_n| \geqslant 1$.

Niech

$$h(x,y,w) := \frac{x(1-x)y(1-y)w(1-w)}{1-(1-xy)w}, \quad (x,y,w) \in [0,1)^3.$$

Poszukujemy $\max\{h(x,y,w) : (x,y,w) \in [0,1)^3\}$. W tym celu ustalmy $w \in [0,1)$ i rozważamy pomocniczą funkcję:

$$f(x,y) = \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-(1-xy)w}, \quad x,y \in [0,1).$$

Mamy:

$$f_x^{'}(x,y) = \frac{1}{(1-(1-xy)w)^2}\left((1-2x)y(1-y)(1-(1-xy)w) - ywx(1-x)y(1-y)\right)$$

oraz

$$f_y^{'}(x,y) = f_x^{'}(x,y),$$

skąd wynika, że punkty stacjonarne funkcji f, to rozwiązania następującego układu równań:

$$\begin{cases} (1-2x)y(1-y)(1-(1-xy)w) - xyw(1-x)y(1-y) = 0, \\ (1-2y)x(1-x)(1-(1-xy)w) - ywx(1-y)x(1-x) = 0, \end{cases}$$

tj.:

$$\begin{cases} y(1-y)\left[(1-2x)(1-(1-xy)w)-xyw(1-x)\right]=0, \\ x(1-x)\left[(1-2y)(1-(1-xy)w)-xyw(1-y)\right]=0, \end{cases}$$

czyli $(x,y)=(0,0)$ lub rozwiązania układu równań:

$$\begin{cases} (1-2x)(1-(1-xy)w)-xyw(1-x)=0, \\ (1-2y)(1-(1-xy)w)-xyw(1-y)=0, \end{cases}$$

co po odjęciu równań stronami implikuje:

$$2(x-y)(1-(1-xy)w)-(x-y)xyw=0,$$

$$(x-y)(2-2w+2xyw-xyw)=0,$$

tj. $x=y$ lub $2-2w+xyw=0$. Pokażemy, że ten drugi warunek nie generuje rozwiązań:

$$\begin{cases} 2-2w+xyw=0, \\ (1-2y)(1-(1-xy)w)-xyw(1-y)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xyw=2w-2, \\ (1-2y)(1-w+2w-2)-(2w-2)(1-y)=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xyw=2w-2, \\ (w-1)[1-2y-2+2y]=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} xyw=2w-2, \\ w=1, \end{cases}$$

lecz ten ostatni układ nie ma rozwiązań w rozważanym obszarze. Zatem w celu ustalenia

$$\max\{h(x,y,w):(x,y,w)\in[0,1)^3\}$$

wystarczy rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} h'_x(x,x,w)=0, \\ h'_y(x,x,w)=0, \end{cases}$$

to jest

$$\begin{cases} 1-w-2x-2xw-x^3w=0, \\ 1-2w+w^2-x^2w^2=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x^2=\frac{(w-1)^2}{w^2}, \\ x=\pm(1-\frac{1}{w}); \end{array}$$

$$1 - w - 2x(1+w) - xw\frac{(w-1)^2}{w^2} = 0,$$
$$x\left(2 + 2w + \frac{(w-1)^2}{w}\right) = 1 - w,$$
$$x\frac{3w^2+1}{w} = 1 - w,$$
$$\pm\frac{w-1}{w^2}(3w^2+1) = 1 - w,$$

co daje

$$w = 1 \vee w^2 = \frac{1}{2},$$
$$w = 1 \vee w = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Stąd łatwo sprawdzamy, że szukany punkt to $(-1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, a odpowiednie maksimum jest równe $(\sqrt{2}-1)^4$.

Podsumowując, znajdujemy:

$$1 \leqslant |A_n| \leqslant \left| (3^{n+1})^3 \iiint\limits_{[0,1]^3} (\sqrt{2}-1)^{4n} \frac{1}{1-(1-xy)w}\, dxdydw \right| =$$
$$= 27(27(\sqrt{2}-1)^4)^n \zeta(3) < 1$$

dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$. Uzyskana sprzeczność dowodzi niewymierności liczby $\zeta(3)$.

Dodatek

Całka niewłaściwa z równania (1) rozumiana może być w następujący sposób:

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[0,1]^2 \setminus [1-\varepsilon,1]^2} \frac{1}{1-xy}\,dxdy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[0,1-\varepsilon]^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k\right) dxdy \;+\; 2\lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[0,1-\varepsilon]\times[1-\varepsilon,1]} \frac{1}{1-xy}\,dxdy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[0,1-\varepsilon]^2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k\right) dxdy,$$

albowiem:

$$\left| \iint\limits_{[0,1-\varepsilon]\times[1-\varepsilon,1]} \frac{1}{1-xy}\,dxdy \right| = \left| \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{\ln(1-xy)}{-y} \Bigg|_{x=0}^{x=1-\varepsilon} dy \right| =$$

$$= \left| \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{\ln(1-(1-\varepsilon)y)}{-y}\,dy \right| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \left| \int_{1-\varepsilon}^{1} \ln(1-(1-\varepsilon)y)\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\,|\ln(1-(1-\varepsilon))|\,\varepsilon = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)| \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0.$$

Kolejna całka niewłaściwa tym razem z równania (2) rozumiana może być w następujący sposób:

$$\iint\limits_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ln(xy)\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1]^2 \setminus [1-\varepsilon,1]^2} \frac{1}{1-xy}\ln(xy)\,dxdy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]^2} \frac{1}{1-xy}\ln(xy)\,dxdy \;+\; 2\lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]\times[1-\varepsilon,1]} \frac{1}{1-xy}\ln(xy)\,dxdy =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]^2} \frac{1}{1-xy}\ln(xy)\,dxdy,$$

albowiem:

$$\left| \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]\times[1-\varepsilon,1]} \frac{1}{1-xy}\ln(xy)\,dxdy \right| \leqslant |\ln(\varepsilon(1-\varepsilon))| \cdot \left| \iint\limits_{[\varepsilon,1-\varepsilon]\times[1-\varepsilon,1]} \frac{1}{1-xy}\,dxdy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\ln(\varepsilon-\varepsilon^2)\right|\cdot\left|\int\limits_{1-\varepsilon}^{1}\frac{\ln(1-xy)}{-y}\Bigg|_{x=\varepsilon}^{x=1-\varepsilon}dy\right| \leqslant \frac{\left|\ln(\varepsilon-\varepsilon^2)\right|}{1-\varepsilon}\left|\ln(1-(1-\varepsilon)^2)\right|\cdot\varepsilon(1-2\,\varepsilon) \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\ln^2(\varepsilon-\varepsilon^2) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} 0.$$

Innymi słowy rozważane w tej pracy całki podwójne, to w gruncie rzeczy całki niewłaściwe w sensie Riemanna, a nie całki w sensie Lebesgue'a-Stieltjesa - co mogłoby się pozornie wydawać właściwym podejściem.

Literatura

[1] Dirk Huylebrouck. Similarities in irrationality proofs for *pi*, $\ln 2$, $\zeta(2)$, and $\zeta(3)$. *Amer. Math. Monthly 108*, 222-231, 2001.

[2] D.S. Mitrinović. *Elementarne nierówności.* PWN, Warszawa 1972.