STUDENCKIE KOŁO NAUKOWE MATEMATYKÓW
WYDZIAŁ MATEMATYCZNO-FIZYCZNY
POLITECHNIKA ŚLĄSKA

PRZEKSZTAŁCENIA PUNKTOWO-ZBIOROWE I ICH ZASTOSOWANIE W TEORII OPTYMALIZACJI

Część I

Do użytku wewnętrznego

GLIWICE 1976

Niniejszą pracę napisała Elżbieta RUDNIEWSKA przy współpracy Wojciecha BIENI i Witolda JARZĘBOWSKIEGO w oparciu o materiały z seminarium dla pracowników i studentów wydziału matematyczno-fizycznego prowadzonego przez doc. dr hab. Wiesława SOBIESZKA

Druk wykonano z makiet dostarczonych przez klienta

Zakład Graficzny Politechniki Śląskiej w Gliwicach z. 1158-76 100

R O Z D Z I A Ł I

PRZESTRZENIE ZWARTE, PRZELICZALNIE ZWARTE I PARAZWARTE

§1. Pojęcie przestrzeni zwartej, parazwartej i przeliczalnie zwartej.

Definicja 1. Przestrzeń topologiczną X nazywamy przestrzenią zwartą, jeżeli z każdego pokrycia tej przestrzeni zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone. Oznacza to, że jeśli $\{G_t\}_{t\in T}$ jest rodziną zbiorów otwartych taką, że $X = \bigcup_{t\in T} G_t$, to istnieje skończony układ wskaźników : $\{t_1,t_2,\dots,t_n\}\subset T$, że $X = G_{t_1}\cup\dots\cup G_{t_n}$.

Warunek ten nosi nazwę warunku Borela - Lebesque'a. Dwoisty z nim warunek Riesza jest następujący: Jeżeli $\{F_t\}_{t\in T}$ jest rodziną zbiorów domkniętych, niepustych, spełniających warunek: $\bigcap_{t\in T} F_t = \emptyset$, to istnieje skończony układ wskaźników $\{t_1,t_2,\dots,t_n\}\subset T$, takich, że: $F_{t_1}\cap\dots\cap F_{t_n} = \emptyset$.

Przykładem przestrzeni zwartej może być skończona przestrzeń dyskretna, a przestrzeni niezwartej prosta rzeczywista z pokryciem otwartym przedziałami $(-n,n)$. Widać,że z takiego pokrycia nie można wybrać podpokrycia skończonego prostej rzeczywistej.

Definicja 2. Przestrzeń topologiczną X nazywamy przeliczalnie zwartą, jeśli z każdego przeliczalnego pokrycia tej przestrzeni zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone.
Warunek ten nosi nazwę warunku Borela.

Dwoisty warunek można wypowiedzieć następująco: Niech $\{F_t\}_{t=1}^{\infty}$ będzie rodziną podzbiorów domkniętych przestrzeni X. Jeśli dla każdego skończonego układu wskaźników $\{t_1,t_2,\dots,t_n\}\subset T$ iloczyn: $F_{t_1}\cap\dots\cap F_{t_n} \neq \emptyset$, to $\bigcap_{t=1}^{\infty} F_t \neq \emptyset$.

Przykładem przestrzeni przeliczalnie zwartej może być również skończona przestrzeń dyskretna.
Zanim podamy definicję przestrzeni parazwartej, wprowadzimy pojęcie rodziny lokalnie skończonej.

Definicja 3. Rodzinę $\{A_s\}_{s\in S}$ podzbiorów przestrzeni topologicznej X nazywamy lokalnie skończoną, jeśli każdy punkt $x\in X$ ma otoczenie U takie, że zbiór $\{s\in S\colon A_s\cap U\neq\emptyset\}$ jest skończony.

Definicja 4. Przestrzeń topologiczną X nazywamy parazwartą, jeżeli z każdego pokrycia otwartego tej przestrzeni można wybrać podpokrycie lokalnie skończone.

Oczywiście każda przestrzeń zwarta jest parazwarta, ale nie na odwrót. Natomiast każda przestrzeń metryzowalna Hausdorffa jest parazwarta.

§2. Zwartość a domkniętość zbioru.

Niech B będzie ustalonym podzbiorem przestrzeni topologicznej X. Zbiór $G \subset B$ nazywamy otwartym w podprzestrzeni B wtedy i tylko wtedy, gdy $G = U \cap B$, gdzie U jest podzbiorem otwartym przestrzeni X.
Rodzina zdefiniowanych w ten sposób podzbiorów otwartych w B określa topologię w zbiorze B.
Podzbiór z tak wprowadzoną topologią nazywamy podprzestrzenią przestrzeni X.

Podzbiór B przestrzeni X nazywamy zbiorem zwartym, jeśli traktowany jako podprzestrzeń przestrzeni X jest przestrzenią zwartą.

Twierdzenie 1. Niech X będzie przestrzenią T_2 /Hausdorffa/, a B jej zwartym podzbiorem. Wówczas B jest domknięty.

Dowód. Pokażemy, że X - B jest zbiorem otwartym. Niech a będzie dowolnym ustalonym punktem nienależącym do B, a x niech należy do B. Ponieważ X jest przestrzenią T_2, więc istnieją takie dwa zbiory otwarte i rozłączne, które oddzielają te dwa punkty. Rozumowanie takie można powtarzać dla każdego punktu $x \in B$. Innymi słowy: $\forall x \in B \ \exists V_x \subset B: x \in V_x$ i $\exists U_x \subset X-B: a \in U_x$: $U_x \cap V_x = \emptyset$.
Ponieważ zbiór B jest zwarty, więc z rodziny V_x można wybrać skończone podpokrycie $\{V_x^1, \dots, V_x^n\}$ zbioru B. Zbiorom V_x^i odpowiadają zbiory U_x^i. Ponadto $a \in U_x^i \ \forall i = 1, 2, \dots, n$ i $U_x^i \subset X - B$. Weźmy iloczyn zbiorów U_x^i. Oczywiście $a \in \bigcap_{i=1}^{n} U_x^i$ i ponadto $\bigcap_{i=1}^{n} U_x^i$ jest zbiorem otwartym. Powtarzając rozumowanie dla innych punktów zbioru X - B stwierdzamy, że każdy z nich należy do X - B wraz ze swoim otwartym otoczeniem. Dowodzi to otwartości zbioru X - B, a tym samym domkniętości zbioru B.
cbdo.

Twierdzenie 2. Niech X będzie przestrzenią zwartą, a A jej domkniętym podzbiorem. Wówczas zbiór A jest zwarty.

Niech $\{G_t\}_{t \in T}$ będzie otwartym pokryciem zbioru A /zbiory G_t otwarte względem A $\forall t \in T$/. Niech $\{H_t\}_{t \in T}$ będą zbiorami otwartymi względem X i takimi, że $A \cap H_t = G_t \ \forall t \in T$. Zbiory H_t wraz ze zbiorem X - A stanowią otwarte pokrycie przestrzeni X. Ponieważ X jest zwarta, więc istnieje skończone podpokrycie: $X = (X - A) \cup H_{t_1} \cup \dots \cup H_{t_n}$, wobec tego: $A = G_{t_1} \cup \dots \cup G_{t_n}$. Stąd A jest zbiorem zwartym.
cbdo.

§3. Ciągłe przekształcenia przestrzeni zwartych.

Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi.

Definicja 1. Mówimy, że funkcja $f: X \to Y$ jest ciągła w punkcie x swojej dziedziny, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia $V_{f(x)}$ istnieje otoczenie U_x takie, że $\forall x \in U_x$: $f(x) \in V_{f(x)}$.

Twierdzenie 1. Niech f(x) będzie ciągłym przekształceniem zwartej przestrzeni X na przestrzeń Y. Wówczas f(X) jest zbiorem zwartym.

Dowód. Niech $\{G_t\}_{t \in T}$ będzie otwartym pokryciem przestrzeni Y. Ponieważ f jest przekształceniem ciągłym, więc przeciwobraz zbioru otwartego jest zbiorem otwartym. Wobec tego $\{f^{-1}(G_t)\}_{t \in T}$ są otwarte i tworzą pokrycie przestrzeni X. Na mocy zwartości tej przestrzeni istnieje skończone podpokrycie: $X = f^{-1}(G_{t_1}) \cup \dots \cup G_{t_n}$, co wobec faktu, że $f(X) = Y$ dowodzi zwar-

zwartości $f(X)$.

cbdo.

Warunek, aby f było przekształceniem na przestrzeń Y nie jest konieczny. Stanowił on tylko pewne ułatwienie, wypowiadając bowiem twierdzenie w formie: "ciągły obraz przestrzeni zwartej jest zbiorem zwartym" trzeba byłoby operować w dowodzie zbiorami otwartymi względem podzbioru przestrzeni Y i przeciwobrazami tych zbiorów.

Twierdzenie 2. Niech f będzie ciągłym przekształceniem przestrzeni zwartej X na przestrzeń Y będącą przestrzenią T_2. Wówczas:

/a/ f jest przekształceniem domkniętym, tzn: $(F = \bar{F}) \Longrightarrow (f(F) = \overline{f(F)})$.
/b/ jeżeli funkcja f jest różnowartościowa, to jest ona homeomorfizmem.

Dowód. /a/ Ponieważ F jest domkniętym podzbiorem przestrzeni zwartej, więc jest zwarty. Wówczas z tw.1. wynika, że $f(F)$ jest zwarty. Ale $f(F) \subset Y$, która jest przestrzenią T_2, stąd wynika, że $f(F) = \overline{f(F)}$.

/b/ Jeżeli f jest przekształceniem różnowartościowym, to istnieje przekształcenie $g = f^{-1}$. Zgodnie z tym: $g^{-1}(F) = f(F)$. Wobec tego przy założeniu, że F jest domknięty, to z uwagi na /a/ $f(F)$ jest również domknięty. Przeciwobraz zbioru domkniętego jest domknięty, stąd wynika, że f jest ciągła, a więc f jest homeomorfizmem.

cbdo.

Definicja. Przestrzeń X z topologią $\mathcal{T}$ nazywamy normalną, jeżeli:

$\forall A,B \subset X: A \cap B = \emptyset, \quad A = \bar{A} \quad i \quad B = \bar{B} \qquad \exists U,V \in \mathcal{T} : A \subset U, \ B \subset V \ i \ U \cap V = \emptyset.$

Twierdzenie 3. Przestrzeń Hausdorffa X zwarta jest normalna.

Dowód. Niech A, B będą rozłącznymi i domkniętymi podzbiorami przestrzeni X. Z tw.2.§2. wynika, że A i B są zbiorami zwartymi. Ustalmy punkt $a \in A$. Ponieważ X jest przestrzenią T_2, więc dla każdego $x \in B$ istnieją otwarte i rozłączne zbiory U_x i V_x takie, że $a \in U_x$ i $x \in V_x$. Wobec tego zbiory: $\{V_x \cap B\}_{x \in B}$ są pokryciem otwartym zbioru B w topologii indukowanej. $V_{x_1} \cap B, \ldots V_{x_n} \cap B$ stanowi skończone pokrycie otwarte zbioru B.

Oznaczmy: $M_a = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$, $N_a = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Zbiory M_a i N_a są otwarte, rozłączne i ponadto $N_a \subset B$ i $a \in M_a$. Konstrukcję powyższą powtarzamy dla każdego $a \in A$. Z pokrycia $\{A \cap M_a\}_{a \in A}$ wybieramy pokrycie skończone: $A \cap M_{a_1}, \ldots, A \cap M_{a_n}$. Ostatecznie zdefiniujmy: $U = \bigcup_{i=1}^{n} M_{a_i}$, $V = \bigcap_{i=1}^{n} N_{a_i}$: $A \subset U$, $B \subset V$ i ponadto U, V są otwarte i rozłączne. Przestrzeń X jest więc normalna.

cbdo.

§4. Przestrzenie ośrodkowe i ich związek z przestrzeniami o przeliczalnej bazie.

Definicja 1. Rodzinę B zbiorów otwartych przestrzeni topologicznej X nazywamy bazą tej przestrzeni, jeśli każdy zniór otwarty $A \subset X$ da się przedstawić jako suma pewnej mnogości zbiorów rodziny B.
Jeżeli B jest przeliczalna, to bazę nazywamy przeliczalną.

Definicja 2. Przestrzeń X nazywamy ośrodkową, jeśli zawiera podzbiór A przeliczalny i gęsty w X /tzn. $\bar{A} = X$, co znaczy, że w każdym zbiorze otwartym $U \subset X$ znajdują się punkty zbioru A/.

Twierdzenie 1. Każda przestrzeń topologiczna o przeliczalnej bazie jest ośrodkowa.

Dowód. Niech $\{B_n\}_{n\in N}$ będzie przeliczalną bazą przestrzeni (X,τ). Z każdego zbioru bazy wybieramy po jednym elemencie $x_n \in B_n$. Wówczas zbiór: $X_0 = \{x_1,\dots,x_k,\dots\}$ jest przeliczalny, jak również gęsty w X, albowiem w każdym zbiorze otwartym zawartym w X istnieją punkty zbioru X_0 /co wynika z własności bazy i sposobu określenia X_0/.

cbdo.

Twierdzenie 2. Każda przestrzeń metryczna i ośrodkowa posiada przeliczalną bazę.

Dowód. Niech X będzie przestrzenią metryczną ośrodkową, a $\{p_1,p_2,\dots\}$ zbiorem gęstym w tej przestrzeni. Określamy zbiór kul: $B = \{K_{n,r}(p_n,r)\}$ o środkach w punktach p_n i promieniach wymiernych. Zbiór tych kul jest przeliczalny i stanowi bazę przestrzeni X. Istotnie, dla dowolnego punktu $p\in X$ i każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje punkt p_n taki, że $\varrho(p,p_n)<\varepsilon$. Niech r będzie liczbą wymierną taką, że $\varrho(p,p_n)<r<\varepsilon$. Wówczas $p\in K_{n,r}$, oraz $\delta(K_{n,r}) < 2\varepsilon$, a więc zbiory $K_{n,r}$ stanowią bazę przestrzeni X.

cbdo.

W zakresie przestrzeni metrycznych ciąg $\{a_n\}$ jest gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt przestrzeni X jest granicą pewnego ciągu wybranego z ciągu $\{a_n\}$.
W zakresie przestrzeni metrycznych ośrodkowość jest równoważna istnieniu przeliczalnej bazy.

§5. Zwartość, przeliczalna zwartość i ciągowa zwartość w przestrzeniach metrycznych.

Lemat 1. Warunek Borela przliczalnej zwartości /def.2.§1./ jest równoważny następującemu warunkowi Cantora:
Jeśli ciąg zbiorów domkniętych i niepustych $F_1,F_2,\dots$ spełnia warunek:

$$/i/ \quad F_1\supset F_2\supset\dots\supset F_n\supset\dots$$

to jest również spełnony warunek:

$$/ii/ \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

Dowód. Załóżmy, że spełniony jest warunek /i/. Niech dany będzie układ liczb: $k_1,\dots,k_n$ i niech j będzie największą z tych liczb. Wówczas: $F_{k_1}\cap\dots\cap F_{k_n} = F_j$ i $F_j \neq \emptyset$ z założenia. Jeżeli więc założyć warunek Borela, to będzie również spełniony warunek /ii/. Znaczy to, że z warunku Borela wynika warunek Cantora.
Dowód implikacji w drugą stronę otrzymujemy po zauważeniu, że:

$$F_1\cap F_2\cap\dots = F_1\cap(F_1\cap F_2)\cap\dots\cap(F_1\cap\dots\cap F_n)\cap\dots$$

oraz:

$$F_1\supset(F_1\cap F_2)\supset\dots\supset(F_1\cap\dots\cap F_n)\supset\dots$$

cbdo.

Lemat 2. W obrębie przestrzeni metrycznych przeliczalna zwartość jest równoważna następującemu warunkowi ciągowej zwartości zwanym warunkiem Bolzano-Weierstrassa:
Każdy ciąg punktów przestrzeni ciągowo zwartej zawiera podciąg zbieżny do punktu tej przestrzeni.

Dowód. Załóżmy, że X jest przestrzenią metryczną przeliczalnie zwartą. Wobec tego jest spełniony warunek Cantora. Niech $\{p_n\}$ będzie ciągiem punktów należących do X. Oznaczmy: $P_n = \{p_n, p_{n+1},\dots\}$. Oczywiste jest, że $P_1\supset P_2\supset\dots$, a to z kolei implikuje fakt, że $\overline{P}_1\supset\overline{P}_2\supset\dots$. Zbiory $\overline{P}_i$

są niepuste /co wynika z ich określenia/ i domknięte. Z warunku Cantora wynika, że istnieje $p \in \bar{P}_n \ \forall n$. Wynika stąd, że kula $K(p,\frac{1}{n})$ ma punkty wspólne z P_n i istnieje nieskończenie wiele wskaźników $m > n$ takich, że $|p_m - p| < \frac{1}{n}$.

Wybieramy podciąg $\{p_{k_n}\}$ w następujący sposób: dla każdego n wybieramy po jednym punkcie ze zbioru $K(p,\frac{1}{n}) \cap P_n$. Oczywiście $|p_{k_n} - p| < \frac{1}{n}$ co oznacza, że $\lim_{n\to\infty} p_{k_n} = p$. Trzeba jeszcze określić taki sposób postępowania, aby było $k_1 < k_2 < \dots$. W tym celu załóżmy, że mamy określone p_{k_1}. Będziemy wybierali p_{k_2} tak, aby $k_1 < k_2$.

Dla $n = 1$: $|p_{k_1} - p| < 1$, dla $n = 2$: $|p_{k_2} - p| < \frac{1}{2}$, $p_{k_1} \in P_1$, $p_{k_2} \in P_2$

Ponieważ $P_1 \supset P_2$, więc ze zbioru P_2 należy przy wyborze elementu p_{k_2} odrzucić wszystkie wyrazy od p_1 do p_{k_1} włącznie i operować zbiorem:

$P_2^o = \{p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \dots\}$, a wyboru punktu p_{k_2} dokonać spośród punktów zbioru $P_2^o \cap K(p,\frac{1}{2})$.

Załóżmy teraz, że warunek Bolzano-Weierstrassa jest spełniony. Dla każdego n wybierzmy punkt $p_n \in F_n$ i załóżmy, że $\lim_{n\to\infty} p_{k_n} = p$. Niech F_n będą zbiorami domkniętymi, niepustymi, tworzącymi ciąg zstępujący. Każdy ze zbiorów F_n zawiera wszystkie wyrazy ciągu $p_1, p_2, \dots$ za wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości. Wobec tego i na mocy domkniętości zbiorów F_n : $p \in F_n$, a zatem $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

cbdo.

<u>Definicja 1.</u> Mówimy, że ciąg punktów $p_1, p_2, \dots$ położony w przestrzeni metrycznej spełnia warunek Cauchy'ego, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie k, że dla każdego $n > k$: $|p_n - p_k| < \varepsilon$.

<u>Definicja 2.</u> Podzbiór A przestrzeni metrycznej X nazywamy ε-siecią, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ istnieje punkt $y \in A$ taki, że $\rho(x,y) < \varepsilon$.

<u>Twierdzenie 1.</u> Niech X będzie przestrzenią metryczną zwartą. Wtedy dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje skończona ε-sieć. Znaczy to, że każdy punkt przestrzeni X jest odległy mniej niż o ε od jakiegoś punktu ε-sieci.

Dowód. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Niech x_1 będzie dowolnym ustalonym punktem przestrzeni X. Punkt x_2 wybieramy tak, aby $\rho(x_1,x_2) > \varepsilon$. Jeśli takiego punktu nie ma, to $A_\varepsilon = \{x_1\}$ /przez A_ε oznaczamy ε-sieć/. W przeciwnym wypadku szukamy takiego punktu x_3, aby $\rho(x_1,x_3) \geqslant \varepsilon$ i $\rho(x_2,x_3) \geqslant \varepsilon$. Jeśli takiego punktu nie ma, to wówczas $A_\varepsilon = \{x_1,x_2\}$. Konstrukcję powtarzamy tak długo, jak długo będzie można znaleźć punkty o powyższych własnościach Zbiór A_ε musi być skończony. Jeśli nie byłby skończony, to zgodnie z tym, że X jest przestrzenią zwartą ciąg punktów x_n musiałby zawierać podciąg zbieżny, czyli spełniający warunek Cauchy'ego. Został on jednak tak skonstruowany, że spełnienie tego warunku byłoby niemożliwe.

cbdo.

<u>Uwaga.</u> Twierdzenie to można udowodnić tylko przy założeniu prezwartości X. /Przestrzeń metryczną nazywamy prezwartą, jeżeli z każdego ciągu jej punktów można wybrać podciąg spełniający warunek Cauchy'ego/.

Definicja 3. Mówimy, że przestrzeń metryczna X jest zupełna, jeśli każdy ciąg elementów tej przestrzeni będący ciągiem Cauchy'ego jest zbieżny do elementu tej przestrzeni.

Przykłady:

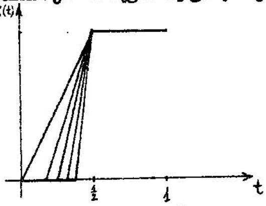
1. Rozważmy przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $\langle 0,1\rangle$ z normą:

$$\|x(t)\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt$$

Dla $n \geqslant 2$ określimy ciąg funkcji z tej przestrzeni:

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & t \in \langle 0, \frac{1}{2}-\frac{1}{n}\rangle \\ nt - \frac{n}{2} + 1 & t \in \langle \frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\rangle \\ 1 & t \in \langle \frac{1}{2}, 1\rangle \end{cases}$$

Przestrzeń ta nie jest przestrzenią $C(0,1)$ /różni się od niej normą/.
Pokażemy, że przestrzeń ta nie jest zupełna.
Na wspólnym wykresie funkcje ciągu wyglądają następująco:



Ciąg ten jest ciągiem Cauchy'ego: $\|x_n - x_m\| = \int_0^1 |x_n - x_m|\,dt =$ $= \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \longrightarrow 0$. Jest jednak rzeczą oczywistą, że nie istnieje funkcja ciągła będąca granicą naszego ciągu.
Oczywiście przestrzeń ta z normą: $\|x(t)\| = \max_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)|$ byłaby przestrzenią $C\langle 0,1\rangle$ - zupełną.
Każda przestrzeń metryczna może być rozszerzona do przestrzeni zupełnej. W naszym przykładzie rozszerzeniem tym będzie przestrzeń $L^1\langle 0,1\rangle$.

2. Przykładem przestrzeni zupełnej jest prosta rzeczywista R^1.

Twierdzenie 2. Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną taką, że dla każdego $\varepsilon > 0$ można wybrać w niej skończoną ε-sieć: A_ε. Wówczas, jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem elementów przestrzeni X, to można z niego wybrać podciąg zbieżny do punktu tej przestrzeni.

Dowód. Weźmy $\varepsilon = 1$. Zgodnie z założeniem istnieje $A_1 = \{x_1, \dots x_{n(1)}\}$. Rozpatrujemy rodzinę kul $K(x_i, 1)$, $x_i \in A_1$ $i = 1,\dots,n(1)$. Ze sposobu określenia tych kul wynika, że $X = \bigcup_{i=1}^{n(1)} K(x_i, 1)$. Któraś z tych kul musi zawierać nieskończenie wiele punktów ciągu $\{a_n\}$ /jako że $n(1)$ jest skończoną liczbą i suma tych kul pokrywa całą przestrzeń X/. Niech kulą tą będzie $K(x_i, 1) = Z_1$. Wybieramy z tej kuli punkt a_{n_1}.
Weźmy teraz $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i rozpatrzmy $Z_1 \cap \bigcup_{i=1}^{n(2)} K(x_i, \frac{1}{2}) = \bigcup_{i=1}^{n(2)} Z_1 \cap K(x_i, \frac{1}{2})$ gdzie punkty x_i należą do sieci $A_{\frac{1}{2}} = \{x_1, \dots, x_{n(2)}\}$. Któryś z iloczynów sumy musi zawierać nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Niech nim będzie: $Z_1 \cap K(x_j, \frac{1}{2}) = Z_2$. Weźmy $n_2 > n_1$ i z tego zbioru wybierzmy a_{n_2}. Mamy w ten sposób określone dwa wyrazy ciągu. Postępowanie kontynuujemy.
Określiliśmy więc w ten sposób ciąg zstępujący zbiorów: $Z_1 \supset Z_2 \supset \dots$ i

ciąg elementów $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ gdzie $n_j < n_k$ dla $j < k$. Pokażemy teraz, że ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i ustalmy je. Obierzmy $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$ i weźmy $j,k > N$. Wówczas $a_{n_j} \in Z_{n_j} \subset Z_N$ i $a_{n_k} \in Z_{n_k} \subset Z_N$.

Jest: $\varrho(a_{n_j}, a_{n_k}) \leqslant \varrho(a_{n_j}, x_N) + \varrho(x_N, a_{n_k}) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Wobec faktu zupełności przestrzeni X oznacza to, że wybrany podciąg jest zbieżny.

Wniosek. W zakresie przestrzeni metrycznych zupełnych przeliczalna zwartość jest równoważna istnieniu dla każdego $\varepsilon > 0$ skończonej ε-sieci.

Twierdzenie 3. Każda przeliczalnie zwarta przestrzeń metryczna jest zwarta.

Dowód. Niech $\{G_t\}_{t \in T}$ będzie otwartym pokryciem przestrzeni X. Ponieważ X jest przeliczalnie zwarta więc jest ośrodkowa, a to implikuje istnienie przeliczalnej bazy otwartej przestrzeni X. Z kolei każda przestrzeń o przeliczalnej bazie otwartej jest przestrzenią Lindelöfa /tzn. każde jej pokrycie otwarte zawiera przeliczalne podpokrycie/. Wynika więc z tego, że $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{t_n}$. Ponieważ X jest przeliczalnie zwarta, więc $X = G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_n}$

cbdo.

Wniosek. W obrębie przestrzeni metrycznych zwartość, przeliczalna zwartość i ciągowa zwartość są pojęciami równoważnymi. Jeżeli dorzucimy jeszcze warunek zupełności przestrzeni, to powyższe pojęcia będą też równoważne z możliwością wyboru skończonej ε-sieci dla każdego $\varepsilon > 0$.

Twierdzenie 4. Każda przestrzeń metryczna zwarta jest zupełna.

Dowód. Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem elementów przestrzeni X spełniającym warunek Cauchy'ego: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \varrho(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ponieważ X jest zwarta więc istnieje podciąg ciągu $\{x_n\}$: $\{x_{n_k}\}$: $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = x \in X$.

Z warunku zbieżności wynika, że dla $\frac{\varepsilon}{3} > 0 \quad \exists M > N : \forall k > M \quad \varrho(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Wobec tego dla $n > N$ i dla $k > M$: $\varrho(x_n, x) \leqslant \varrho(x_n, x_N) + \varrho(x_N, x_{n_k}) + \varrho(x_{n_k}, x) < \varepsilon$.

Oznacza to, że $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \in X$, wobec czego X jest przestrzenią zupełną.

cbdo.

Lemat 3. Każda przestrzeń metryczna zwarta jest ograniczona.

Dowód. Dla $\varepsilon = 1$ określmy w X sieć A_1. Niech x,y będą dowolnie ustalonymi punktami z X. Wówczas: $\varrho(x,y) \leqslant \varrho(x, x_i) + \varrho(x_i, x_j) + \varrho(x_j, y)$ gdzie $x_i, x_j \in A_1$ i zostały tak wybrane, by $\varrho(x, x_i) < 1$ i $\varrho(y, x_j) < 1$. Wobec tego: $\varrho(x,y) \leqslant 2 + \delta(A_1)$. Na mocy dowolności wyboru punktów x,y możemy twierdzić, że nierówność będzie również prawdziwa w przypadku, gdy po jej lewej stronie będzie $\sup\limits_{x,y \in X} \varrho(x,y) = \delta(X)$. Oznacza to, że X jest ograniczona

cbdo.

Twierdzenie 5. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni R^n. Wówczas A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

Dowód. Zgodnie z lematem 3. A jest zbiorem ograniczonym. Jest on również zbiorem domkniętym jako zwarty podzbiór zwartej przestrzeni Hausdorffa. Na odwrót, jeśli A jest ograniczony, to jest zawarty w pewnej kostce I^n, która jest zwarta w R^n. A jest z założenia zbiorem domkniętym, a więc ostatecznie jest zwarty ~~jako domknięty~~ podzbiór zbioru zwartego.

cbdo.

ROZDZIAŁ II

TOPOLOGICZNE WŁASNOŚCI PRZEKSZTAŁCEŃ PUNKTOWO - ZBIOROWYCH

§1. Półciągłość z dołu, półciągłość z góry, domkniętość i półzwartość z góry przekształceń punktowo-zbiorowych.

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Przez 2^Y oznaczymy rodzinę wszystkich podzbiorów przestrzeni Y. Przekształcenie $F: X \to 2^Y$ przyporządkowujące każdemu elementowi przestrzeni X zbiór należący do 2^Y nazywamy przekształceniem punktowo-zbiorowym.

Definicja. Mówimy, że ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ punktów przestrzeni topologicznej X jest zbieżny do punktu $x \in X$, jeżeli $\forall U(x)\ \exists N\ \forall n > N : x_n \in U(x)$, gdzie U(x) - otoczenie punktu x. Oznaczamy: $\lim_{n\to\infty} x_n = x \equiv x_n \longrightarrow x$.

Definicja 1. Przekształcenie F nazywamy półciągłym z dołu /p.c.d./ w punkcie $x_0 \in X$, jeśli dla każdego zbioru otwartego U mającego część wspólną ze zbiorem $F(x_0)$ istnieje otoczenie $V(x_0)$ takie, że

$$\forall x \in V(x_0) : \quad F(x) \cap U \neq \emptyset$$

Definicja 1'. Przekształcenie F nazywamy p.c.d. w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in X \text{ i } x_n \to x_0 \text{ i } \forall y_0 \in F(x_0)\ \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} : y_n \in F(x_n) \text{ i } y_n \to y_0$$

Lemat. Niech X będzie przestrzenią topologiczną spełniającą I aksjomat przeliczalności. Wtedy w każdym punkcie $x \in X$ istnieje przeliczalna baza otoczeń $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ taka, że $O_{n+1} \subset O_n$.

Dowód. Niech $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie przeliczalną bazą w punkcie $x \in X$. Oznaczmy: $O_1 = U_1$; $O_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$. $\forall n :$ O_n jest otwarty oraz $O_{n+1} \subset O_n$. Pokażemy, że $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest bazą w punkcie x. Jest oczywiste, że $\forall n : x \in O_n$. Niech U - zbiór otwarty i niech $x \in U$. Ponieważ $\{U_i\}$ jest bazą w x, to

$$\exists i_0 : \quad x \in U_{i_0} \subset U \Longrightarrow x \in O_{i_0} \subset U .$$

cbdo.

Twierdzenie 1. Jeżeli przestrzeń Y spełnia I aksjomat przeliczalności, to przekształcenie p.c.d. w sensie def.1 jest także p.c.d. w sensie def.1'.

Dowód. Niech przekształcenie F będzie p.c.d. w sensie def.1. Wybierzmy ciąg $x_n \to x_0$ $x_n, x_0 \in X$ i ustalmy $y_0 \in F(x_0)$. Niech $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą otoczeń punktu y_0 spełniającą warunek: $O_{n+1} \subset O_n$. Na mocy lematu taka baza istnieje. Zatem:

$$\forall n: \quad O_n \cap F(x_0) \neq \emptyset \Longrightarrow \exists V_n(x_0): \quad \forall x \in V_n(x_0) \quad O_n \cap F(x) \neq \emptyset$$

dla $n = 1$:

$$\exists V_1(x_0) : \forall x \in V_1(x_0) : O_1 \cap F(x) \neq \emptyset$$

$x_n \to x \Rightarrow \exists N_1 : \forall n > N_1 \quad x_n \in V_1(x_0)$ czyli $F(x_n) \cap O_1 \neq \emptyset$ dla $n > N_1$

dla $n = 2$:

$$\exists V_2(x_0) : \forall x \in V_2(x_0) : O_2 \cap F(x) \neq \emptyset$$

$x_n \to x \Rightarrow \exists N_2 > N_1 : \forall n > N_2 \quad x_n \in V_2(x_0)$ czyli $F(x_n) \cap O_2 \neq \emptyset$ dla $n > N_2$

itd.

dla $n = k$: $\exists N_k > N_{k-1} : \forall n > N_k \quad F(x_n) \cap O_k \neq \emptyset$.

Niech $y_i \in F(x_i)$ $i = 1, \dots, N_1$, N_1 - wybrane dowolnie

oraz $y_{N_1+i} \in F(x_{N_1+i}) \cap O_1$ $i = 1, \dots, N_2 - N_1$

itd.

$y_{N_k+i} \in F(x_{N_k+i}) \cap O_k$ $i = 1, \dots, N_{k+1} - N_k$

Z konstrukcji ciągu $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ wynika, że $y_n \to y_0$;

cbdo.

Twierdzenie 2. Jeżeli przestrzeń X spełnia I aksjomat przeliczalności, to przekształcenie p.c.d. w sensie def.1' jest także p.c.d. w sensie def.1.

Dowód. Załóżmy, że F jest p.c.d. w punkcie $x_0 \in X$ w sensie def.1', lecz nie jest p.c.d. w x_0 w sensie def.1 . Oznacza to, że istnieje zbiór U otwarty w Y i $U \cap F(x_0) \neq \emptyset$ taki, że $\forall V(x_0) \quad \exists x \in V(x_0) : F(x) \cap U = \emptyset$.
Niech $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą w punkcie x_0 taką, że $B_{n+1} \subset B_n \quad \forall n = 1,2,\dots$
Na mocy przyjętego założenia: $\forall n \quad \exists x_n \in B_n : F(x_n) \cap U = \emptyset$ /i/
Oczywiście $x_n \to x_0$. Niech $y_0 \in F(x_0) \cap U \neq \emptyset$. Na mocy def.1' : $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$:
$y_n \in F(x_n)$ i $y_n \to y_0$ co jest sprzeczne z /i/.

cbdo.

Wniosek. Jeżeli X i Y są przestrzeniami spełniającymi I aksjomat przeliczalności, to definicje 1 i 1' są równoważne.

Definicja 2. Przekształcenie F nazywamy półciągłym z góry /p.c.g./ w punkcie $x_0 \in X$, jeśli dla każdego zbioru U otwartego w Y istnieje otoczenie $V(x_0)$ punktu x_0 takie, że $\forall x \in V(x_0) : F(x) \subset U$.

Definicja 3. Przekształcenie F nazywamy nazywamy półzwartym z góry /p.z.g/ w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli / $x_0 \in X$, $x_n \in X$, $x_n \to x_0$, $y_n \in F(x_n)$ / $\Longrightarrow$ /$\exists \{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $y_{n_k} \to y_0 \in F(x_0)$ /.

Definicja 3'. Przekształcenie F nazywamy półzwartym z góry w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli F jest p.c.g. w x_0 i zbiór $F(x_0)$ jest zwarty.

Twierdzenie 3. Jeżeli przekształcenie F jest p.z.g. w x_0 w sensie def.3', to jest ono również p.z.g. w x_0 w sensie def.3 .

Dowód. Załóżmy, że F jest p.z.g. w $x_0 \in X$ w sensie def.3', a nie jest w tym punkcie p.z.g. w sensie def.3 , tzn: $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in X$ i $x_n \to x_0 \in X$ i $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$: $y_n \in F(x_n)$, że $\forall y \in F(x_0) \quad \exists U(y)$ i $\exists N(y)$, że $\forall k > N(y)$ $y_{n_k} \notin U(y)$. $F(x_0) \subset \bigcup_{y \in F(x_0)} U(y)$, a zbiory $U(y)$ przy y przebiegających zbiór $F(x_0)$ stanowią otwarte pokrycie $F(x_0)$. $F(x_0)$ jest zwarty, stąd: $F(x_0) \subset \bigcup_{i=1}^{M} U(y_i)$ /$y_i \in F(x_0)$/. A więc skończona ilość wyrazów ciągu $\{y_n\}$ należy do $\bigcup_{i=1}^{M} U(y_i)$ (I)

F jest p.c.g, więc dla $\bigcup_{i=1}^{M} U(y_i)$ (który jest zbiorem otwartym i zawierającym $F(x_0)$) $\exists V(x_0)$: $\forall x \in V(x_0)$: $F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{M} U(y_i)$, $x_n \to x_0 \Rightarrow \exists N$: $\forall n > N$ $x_n \in V(x_0)$ i $F(x_n) \subset \bigcup_{i=1}^{M} U(y_i)$, wobec czego : nieskończona ilość wyrazów ciągu $\{y_n\}$ należy do $\bigcup_{i=1}^{M} U(y_i)$ (II)

Otrzymaliśmy (I) i (II) co jest niemożliwe.

cbdo.

Twierdzenie 4. Jeżeli przestrzeń X spełnia I aksjomat przeliczalności i jeżeli z ciągowej zwartości przestrzeni Y wynika jej zwartość, to z półzwartości przekształcenia F w sensie def.3 wynika jego półzwartość w sensie def.3'.

Dowód. Ciągowa zwartość $F(x_0)$ jest oczywista. Załóżmy, że F nie jest p.c.g w punkcie x_0, tzn: $\exists U(F(x_0))$ że $\forall V(x_0)$ $\exists x \in V(x_0)$ i $\exists y \in F(x)$ że $y \notin U(F(x_0))$. Niech $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie bazą w punkcie x_0 taką, że $V_{n+1} \subset V_n$. Niech $x_i \in V_i$, $y_i \in F(x_i)$ i $y_i \notin U(F(x_0))$ /i/

Jeżeli $y_{i_k} \to y_0 \in F(x_0) \Rightarrow \exists N$: $\forall k > N$ $y_{i_k} \in U(F(x_0))$ co jest niemożliwe ze względu na /i/.

cbdo.

Definicja 4. Przekształcenie F nazywamy domkniętym w punkcie $x_0 \in X$, jeżeli: $\forall y_0 \in Y \wedge y_0 \notin F(x_0)$ istnieją otoczenia $V(x_0)$ i $U(y_0)$ takie, że: $[x \in V(x_0)] \Rightarrow [F(x) \cap U(y_0) = \emptyset]$.

Definicja 4'. Przekształcenie F nazywamy domkniętym w punkcie $x_0 \in X$, jeśli prawdziwa jest implikacja:

$$[x_n \to x_0 \, , \, y_n \to y_0 \, , \, x_n \in X \, , \, y_n \in F(x_n)] \Longrightarrow [y_0 \in F(x_0)]$$

Twierdzenie 5. Jeżeli przekształcenie F jest domknięte w x_0 w sensie def.4, to jest ono również domknięte w tym punkcie w sensie def.4'.

Dowód. Przypuśćmy, że F jest domknięte w punkcie $x_0 \in X$ w sensie def.4, lecz nie jest w tym punkcie domknięte w sensie def.4', tzn:

$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $x_n \in X$ i $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ $y_n \in F(x_n)$, i: $x_n \to x_0 \in X$, $y_n \to y_0 \in Y$ i $y_0 \notin F(x_0)$. Stąd i z def.4: $\exists V(x_0)$ i $\exists U(y_0)$, że:

$$[x \in V(x_0)] \Rightarrow [F(x) \cap U(y_0) = \emptyset]$$

$x_n \to x_0 \Rightarrow \exists N$: $\forall n > N$: $x_n \in V(x_0)$ czyli $F(x_n) \cap U(y_0) = \emptyset$ /i/

$y_n \to y_0 \Rightarrow \exists N$: $\forall n > N$: $y_n \in U(y_0)$ i $y_n \in F(x_n)$

czyli $y_n \in F(x_n) \cap U(y_0)$ $\forall n > N$ co jest sprzeczne z /i/.

cbdo.

Twierdzenie 6. Jeżeli przestrzenie X i Y spełniają I aksjomat przeliczalności, to jeżeli przekształcenie F jest domknięte w x_0 w sensie def.4', to jest ono również domknięte w tym punkcie w sensie def.4.

Dowód. Przypuśćmy, że F jest domknięte w punkcie $x_0 \in X$ w sensie def.4', a nie jest w tym punkcie domknięte w sensie def.4, tzn: $\exists y_0$: $y_0 \in Y$ i $y_0 \notin F(x_0)$ że $\forall V(x_0)$ i $\forall U(y_0)$ $\exists x \in V(x_0)$ że $F(x) \cap U(y_0) \neq \emptyset$.
Niech $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ będzie bazą w x_0, spełniającą warunek: $V_{n+1} \subset V_n$.
$\forall n$ $\exists x_n \in V_n$ że $F(x_n) \cap U(y_0) \neq \emptyset$. Widać, że $x_n \to x_0$.
Niech $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie bazą w punkcie y_0 spełniającą warunek: $U_{n+1} \subset U_n$.

$\forall n: F(x_n) \cap U_n \neq \emptyset$, więc $\exists y_n: y_n \in F(x_n) \cap U_n$. Widać, że $y_n \to y_0$. Z def.4' wynika, że $y_0 \notin F(x_0)$, a to jest sprzeczne z założeniem.

obdo.

§2. Półciągłość z dołu i półciągłość z góry na zbiorze.

Definicja 1. Przekształcenie $F: X \to 2^Y$ jest półciągłe z dołu /półciągłe z góry/ w przestrzeni X, jeżeli F jest półciągłe z dołu /półciągłe z góry/ w każdym punkcie $x \in X$.

Twierdzenie 1. F jest p.c.d. $\Longleftrightarrow$ $\forall G$ otwartego w Y zbiór: $\{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ jest otwarty w X.

Dowód. Załóżmy, że $G \subset Y$ jest otwarty i rozważmy zbiór: $\{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$. Jeżeli jest on zbiorem pustym, to jest otwarty w X, załóżmy więc, że nie jest zbiorem pustym. Wobec tego $\exists x_0: x_0 \in \{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$, czyli: $F(x_0) \cap G \neq \emptyset$. Z p.c.d. F wynika, że $\exists V(x_0)$ takie, że: $\forall x: x \in V(x_0)$: $F(x) \cap G \neq \emptyset$, co oznacza, że: $V(x_0) \subset \{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$. Czyli każdy punkt rozważanego zbioru zawiera się w nim wraz z pewnym swym otoczeniem, czyli $\{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ jest otwarty w X.

Odwrotnie, załóżmy, że zbiór $\{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ jest otwarty w X dla dowolnego zbioru G otwartego w Y. Pokażemy, że wtedy F jest p.c.d. Wybierzmy dowolny $x_0 \in X$ oraz zbiór G otwarty w Y, taki, że $F(x_0) \cap G \neq \emptyset$. Zbiór $\{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ jest więc otoczeniem punktu x_0. Oznaczmy go przez $V(x_0)$. Jest: $\forall x \in V(x_0): F(x) \cap G \neq \emptyset$, co oznacza, że F jest p.c.d.

obdo.

Twierdzenie 2. Przekształcenie F jest p.c.g. $\Longleftrightarrow$ $\forall G$ otwartego w Y zbiór: $\{x \in X: F(x) \subset G\}$ jest otwarty w X.

Dowód. Załóżmy, że $G \subset Y$ jest otwarty i rozważmy zbiór: $\{x \in X: F(x) \subset G\}$. Jeżeli jest on zbiorem pustym to jest otwarty, załóżmy więc, że nie jest zbiorem pustym. Wobec tego $\exists x_0: x_0 \in \{x \in X: F(x) \subset G\}$, czyli $F(x_0) \subset G$. Z p.c.g. F wynika, że $\exists V(x_0): x \in V(x_0) \Rightarrow F(x) \subset G$ co oznacza, że: $V(x_0) \subset \{x \in X: F(x) \subset G\}$. Czyli każdy punkt rozważanego zbioru zawiera się w nim wraz z pewnym swym otoczeniem, stąd zbiór $\{x \in X: F(x) \subset G\}$ jest otwarty w X.

Odwrotnie, załóżmy, że $\{x \in X: F(x) \subset G\}$ jest otwarty w X dla dowolnego zbioru G otwartego w Y. Pokażemy, że wtedy F jest p.c.g. Wybierzmy dowolny $x_0 \in X$ oraz zbiór G otwarty w Y, taki, że $F(x_0) \subset G$. Zbiór $\{x \in X: F(x) \subset G\}$ jest więc otwartym otoczeniem punktu x_0. Oznaczmy go przez $V(x_0)$. Jest: $\forall x \in V(x_0)$: $F(x) \subset G$, co oznacza, że F jest p.c.g

obdo.

Lemat. Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi, a $F: X \to 2^Y$ dowolnym przekształceniem punktowo-zbiorowym. Prawdziwe są następujące związki:

/I/ $\{x \in X: F(x) \subset (Y - G)\} = X - \{x \in X: F(x) \cap G \neq \emptyset\}$

/II/ $\{x \in X: F(x) \cap (Y - G) \neq \emptyset\} = X - \{x \in X: F(x) \subset G\}$

Dowód. $F(x) \subset (Y - G) \Longleftrightarrow F(x) \cap G \neq \emptyset$

$F(x) \cap (Y - G) \neq \emptyset \Longleftrightarrow F(x) \not\subset G$

obdo.

Z lematu wynikają następujące dualne kryteria półciągłości:

Twierdzenie 1'. Przekształcenie F jest p.c.d. $\Longleftrightarrow$ $\forall G$ domkniętego w Y zbiór: $\{x \in X: F(x) \subset G\}$ jest domknięty w X.

<u>Twierdzenie 2'.</u> Przekształcenie F jest p.c.g. $\Longleftrightarrow$ $\forall G$ domkniętego w Y, zbiór : $\{x \in X : F(x) \cap G \neq \emptyset\}$ jest domknięty w X.

<u>Twierdzenie 3.</u> Przekształcenie F jest p.c.d. w punkcie $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru $B \subset X$:

$$x_0 \in \overline{B} \Longrightarrow F(x_0) \subset \overline{\bigcup_{x \in B} F(x)}$$

<u>Dowód.</u> Załóżmy, że F jest p.c.d. w punkcie $x_0 \in X$ i niech $x_0 \in \overline{B}$, $B \subset X$. Można przyjąć, że $F(x_0) \neq \emptyset$. Oznaczmy: $\overline{\bigcup_{x \in B} F(x)} = K$. Przypuśćmy, że $F(x_0) \not\subset K$, wtedy $F(x_0) \cap (Y - K) \neq \emptyset$. Ponieważ zbiór $Y - K$ jest otwarty, więc z p.c.d. F wynika istnienie otoczenia $V(x_0)$: $\forall x \in V(x_0)$: $F(x) \cap (Y - K) \neq \emptyset$. Z tego, że $x_0 \in \overline{B}$ wynika niepustość zbioru : $B \cap V(x_0)$. Niech $\overline{x} \in B \cap V(x_0)$, wówczas $F(\overline{x}) \cap (Y - K) \neq \emptyset$, czyli $F(\overline{x}) \not\subset K$, a tym samym $F(\overline{x}) \not\subset \bigcup_{x \in B} F(x)$, co jest niemożliwe, gdyż $\overline{x} \in B$.

Załóżmy teraz, że $\forall B \subset X$: $[x_0 \in \overline{B}] \Longrightarrow [F(x_0) \subset \overline{\bigcup_{x \in B} F(x)}]$. Pokażemy, że F jest p.c.d. w x_0.

Niech K będzie zbiorem domkniętym w Y. Wówczas zbiór $B = \{x \in X : F(x) \subset K\}$ jest domknięty. Istotnie, $\bigcup_{x \in B} F(x) \subset K$ i ponieważ $K = \overline{K}$, więc $\overline{\bigcup_{x \in B} F(x)} \subset K$. Stąd i z założenia wynika, że jeśli $x_0 \in B$, to $F(x_0) \subset \overline{\bigcup_{x \in B} F(x)} \subset K$, czyli $x_0 \subset B$. Przypuśćmy teraz, że F nie jest p.c.d. w x_0, wtedy $\exists U : U = \operatorname{Int} U$ taki, że: $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ i $\forall V(x_0)$ $\exists \overline{x} \in V(x_0)$: $F(\overline{x}) \cap U = \emptyset$. Wobec tego $F(x_0) \not\subset (Y - U) = K$ i $F(\overline{x}) \subset K$. Pokazaliśmy więc, że punkt $x_0 \notin B$ i w każdym jego otoczeniu $V(x_0)$ znajdzie się punkt $\overline{x} \in B$, co niemożliwe wobec domkniętości zbioru B.

cbdo.

<u>Twierdzenie 4.</u> Jeżeli Y jest przestrzenią T_1, a A dowolnym podzbiorem przestrzeni Y i przekształcenie F jest p.c.g., to zbiór: $\{x : A \subset F(x)\}$ jest domknięty.

<u>Dowód.</u> $[A \not\subset F(x)] \equiv [\exists z \in A : F(x) \subset Y - \{z\}]$

dlatego: $\{x : A \not\subset F(x)\} = \bigcup_{z \in A} \{x : F(x) \subset Y - \{z\}\}$

$Y - \{z\}$ jest otwarty a F jest p.c.g, więc na mocy tw.9 zbiór : $\{x : F(x) \subset Y - \{z\}\}$ jest otwarty, wobec czego $\{x : A \subset F(x)\}$ jest domknięty

cbdo.

<u>Twierdzenie 5.</u> Jeżeli Y jest przestrzenią T_1 i przekształcenie F jest p.c.g. w punkcie $x_0 \in X$, to:

$$[x_0 \in \overline{B}] \Rightarrow [\bigcap_{x \in B} F(x) \subset F(x_0)]$$

<u>Dowód.</u> $B \subset \{\overline{x} : \bigcap_{x \in B} F(x) \subset F(\overline{x})\}$

Z tw.4 wynika, że zbiór: $\{\overline{x} : \bigcap_{x \in B} F(x) \subset F(\overline{x})\}$ jest domknięty, więc:

$$\overline{B} \subset \{x : \bigcap_{x \in B} F(x) \subset F(\overline{x})\}$$

cbdo.

<u>Twierdzenie 6.</u> Jeżeli przekształcenie F jest p.z.g, to obraz $F(K) = \bigcup_{x \in K} F(x)$ zbioru zwartego $K \subset X$ jest zbiorem zwartym.

<u>Dowód.</u> Niech $F(K) \subset \bigcup_{i \in I} G_i$, gdzie $\{G_i : i \in I\}$ - pokrycie otwarte zbioru $F(K)$. Jeżeli $x \in K$, to zbiór $F(x)$, który jest zwarty, może być pokryty skończoną ilością G_i. Oznaczmy wyznaczony przez nie zbiór przez G_x. Oczywiste jest, że : $K \subset \bigcup_{x \in K} \{x \in X : F(x) \subset G_x\}$ i ponieważ z założenia zbiór K jest zwarty, więc : $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in X : F(x) \subset G_{x_n}\} \Rightarrow F(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{x_i} = \bigcup_{j=1}^{m} G_{i_j} \subset \bigcup_{i \in I} G_i$

cbdo.

Definicja 2. Wykresem przekształcenia $F: X \to 2^Y$ nazywamy zbiór:
$$W(F) = \{(x,y) \in X \times Y : x \in X , y \in F(x)\}$$

Twierdzenie 7. Przekształcenie $F: X \to 2^Y$ jest domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy wykres tego przekształcenia $W(F)$ jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$.

Dowód. Twierdzenie wynika wprost z definicji domkniętości oraz faktu:
$$(x_0,y_0) \notin W(F) \Longleftrightarrow U(x_0) \cap V(y_0) \not\subset W(F)$$

Przykład. Niech $f(x,y)$ będzie funkcją rzeczywistą, ciągłą w $X \times Y$. Niech dla każdego $x \in X$: $F(x) = \{y \in Y: f(x,y) \leqslant 0\}$.
F jest przekształceniem domkniętym, ponieważ jego wykres:
$W(F) = \{(x,y) \in X \times Y : f(x,y) \leqslant 0\}$ jest zbiorem domkniętym w $X \times Y$.

§3. Półciągłość z góry a domkniętość.

Lemat 1. Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną, Y zaś przestrzenią zwartą. Wówczas rzut przestrzeni $X \times Y$ na oś X jest przekształceniem domkniętym, tzn. przeprowadza zbiory domknięte w $X \times Y$ w zbiory domknięte w X.
Inaczej mówiąc: jeśli G jest podzbiorem otwartym przestrzeni $X \times Y$, to zbiór: $P(G) = \{x \in X : (\{x\} \times Y) \subset G$ jest otwarty w X.

Dowód. Udowodnimy ten lemat w drugim sformułowaniu. W myśl definicji topologii iloczynowej, zbiór G ma postać: $G = \bigcup_t (G_t \times H_t)$, gdzie zbiory G_t są otwarte w X, zaś H_t w Y. Niech $x_0 \in P(G)$. Należy znaleźć zbiór otwarty $R(x_0)$ taki, że: $x_0 \in R(x_0) \subset P(G)$. Na mocy definicji zbioru $P(G)$ mamy: $\{x_0\} \times Y \subset G$, a zatem dla każdego $y \in Y$ istnieje wskaźnik $t(y)$ taki, że: $(x_0,y) \in G_{t(y)} \times H_{t(y)}$. Mamy więc: $x_0 \in G_{t(y)}$, $y \in H_{t(y)}$ oraz $G_{t(y)} \times H_{t(y)} \subset G$.
Ponieważ rodzina zbiorów $H_{t(y)}$, gdzie $y \in Y$, jest otwartym pokryciem zwartej przestrzeni Y, istnieje skończony układ $y_1,y_2,\dots,y_n$ taki, że $Y = H_{t(y_1)} \cup \dots \cup H_{t(y_n)}$. Przyjmijmy $R(x_0) = G_{t(y_1)} \cap \dots \cap G_{t(y_n)}$.
Zbiór $R(x_0)$ jest otwarty i $x_0 \in R(x_0)$. Jest również:
$$[R(x_0) \times Y] \subset [(G_{t(y_1)} \times H_{t(y_1)}) \cup \dots \cup (G_{t(y_n)} \times H_{t(y_n)})] \subset G.$$
wynika stąd, że $R(x_0) \subset P(G)$, czyli $P(G)$ jest otwarty.

cbdo.

Twierdzenie 1. Niech przekształcenie $Q: X \to 2^{X \times Y}$ będzie określone następująco: $Q(x) = \{x\} \times Y$. Jeżeli Y jest przestrzenią zwartą, to Q jest p.c.g

Dowód. Wybierzmy dowolny zbiór otwarty $G \subset X \times Y$. Rzut zbioru G na oś X : $P(G) = \{x \in X : (\{x\} \times Y) \subset G\} = \{x \in X : Q(x) \subset G$ jest otwarty na mocy lematu 1. Stąd korzystając z tw.2.§2. otrzymujemy, że przekształcenie Q jest p.c.g.

cbdo.

Lemat 2. Niech przekształcenie $F: X \to 2^Y$ będzie p.c.g, a K_0 ustalonym zbirem domkniętym w Y. Wtedy przekształcenie $L: X \to 2^Y$ określone:
$L(x) = K_0 \cap F(x)$ jest również p.c.g.

Dowód lematu wynika w sposób oczywisty z tw.2 .§2.

Twierdzenie 2. Niech $D = \bar{D} \subset X \times Y$ i $F: X \to 2^Y$: $F(x) = \{y \in Y: (x,y) \in D\}$. Jeżeli Y jest przestrzenią zwartą, to przekształcenie F jest p.c.g.

Dowód. Niech $K = \bar{K} \subset Y$. Określamy jak w twierdzeniu 1. przekształcenie $Q: X \to 2^{X\times Y}$: $Q(x) = \{x\}\times Y$. Przekształcenie Q jest p.c.g, a na mocy lematu 2. również i przekształcenie $L(x) = Q(x) \cap D$ jest p.c.g.
Wobec powyższego i faktu domkniętości zbioru K, a więc i zbioru $X\times K$ otrzymujemy, że zbiór: $\{x \in X : (Q(x)\cap D)\cap(X\times K) \neq \emptyset\}$ jest domknięty w X. Pokażemy, że zbiór ten jest równy: $\{x \in X : F(x)\cap K \neq \emptyset\}$. Wynika to z relacji: $[(x,y)\in D \wedge y \in K] \Leftrightarrow [(x,y)\in D\cap(X\times K)] \Leftrightarrow$ $[(x,y)\in Q(x)\cap D\cap(X\times K)]$. Pierwsza z tych równoważności jest oczywista, druga natomiast wynika z faktu, że:
$Q(x)\cap(X\times K) = (\{x\}\times Y)\cap(X\times K) = (\{x\}\cap X)\times(Y\cap K) = \{x\}\cap K$.
Oczywiste jest, że $(x,y)\in X\times K \Leftrightarrow (x,y)\in\{x\}\times K$. Otrzymujemy więc:
$F(x)\cap K \neq \emptyset \Longleftrightarrow \exists x : x \; F(x)\cap K \Longleftrightarrow \exists x : (x,y)\in D \wedge x\in K \Longleftrightarrow$
$\exists x : (x,y)\in Q(x)\cap D\cap(X\times K) \Longleftrightarrow Q(x)\cap D\cap(X\times K)\neq\emptyset$.
Pokazaliśmy, że zbiór $\{x\in X : F(x)\cap K\neq\emptyset\}$ jest domknięty w X, co dowodzi p.c.g przekształcenia F.

cbdo.

Twierdzenie 3. Jeżeli Y jest przestrzenią regularną i przekształcenie $F: X \to 2^Y$ o domkniętych zbiorach-obrazach jest p.c.g, to jego wykres: $W(F) = \{(x,y)\in X\times Y : x\in X,\ y\in F(x)\}$ jest zbiorem domkniętym w $X\times Y$.

Dowód. Jeżeli Y jest przestrzenią regularną, to:
$[y\notin F(x)] \equiv [\exists U\subset Y : U = \mathrm{Int}U$ i $\exists V\subset Y : V = \mathrm{Int}V : U\cap V = \emptyset$ i $y\in U$ i $F(x)\subset V]$. Z kolei:
$$(X\times Y) - W(F) = \{(x,y)\in X\times Y : x\in X \text{ i } Y\notin F(x)\} = \bigcup_{U\cap V=\emptyset}\{[x: F(x)\subset V]\times U\}$$
Wobec p.c.g przekształcenia F zbiór: $\{x : F(x)\subset V\}$ jest otwarty w X /tw.2.§2./. Dlatego zbiór $\{x : F(x)\subset V\}\times U$ a w rezultacie i zbiór: $(X\times Y) - W(F)$ jest otwarty.

cbdo.

Twierdzenie 4. Niech Y będzie zwartą przestrzenią regularną. Wtedy przekształcenie $F: X\to 2^Y$ o domkniętych zbiorach-obrazach jest p.c.g wtedy i tylko wtedy, gdy jego wykres: $W(F) = \{(x,y)\in X\times Y : x\in X \text{ i } y\in F(x)\}$ jest zbiorem domkniętym.

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z tw.2 i tw.3.

§4. Przestrzenie podzbiorów domkniętych.

Niech X będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Przez 2^X oznaczymy rodzinę wszystkich podzbiorów domkniętych przestrzeni X.
W przestrzeni 2^X wprowadzimy topologię Vietorisa /wykładniczą/ przyjmując za podbazę otwartą tej przestrzeni następujące rodziny zbiorów:
$$B(G) = \{F\in 2^X : F\subset G\} \quad \text{i} \quad C(H) = \{F\in 2^X : F\cap H\neq\emptyset\}$$
gdzie G i H są dowolnymi podzbiorami otwartymi przestrzeni X.
Z powyższego wynika, że zbiory postaci:
$$B(G_0, G_1, \dots, G_n) = \{F\in 2^X : F\subset G_0 \text{ i } F\cap G_i\neq\emptyset \text{ dla } i = 1,\dots n\}$$
gdzie G_i są zbiorami otwartymi w X, tworzą bazę przestrzeni 2^X.

Definicja 1. Będziemy mówić, że nieskończone pokrycie danej przestrzeni jest istotnie nieskończone, jeśli nie zawiera ono podpokrycia skończonego.

Lemat Alexandera. Niech A będzie podbazą przestrzeni topologicznej X. Jeśli istnieje pokrycie istotnie nieskończone przestrzeni X, to istnieje też pokrycie istotnie nieskończone tej przestrzeni zawarte w A.

Twierdzenie 1. Jeżeli przestrzeń X jest zwarta, to przestrzeń 2^X jest również zwarta.

Dowód. W oparciu o lemat Alexandera pokażemy, że każde pokrycie przestrzeni 2^X, elementy którego należą do otwartej podbazy przestrzeni 2^X zawiera skończone podpokrycie.

$2^X = \bigcup_t B(G_t) \cup \bigcup_s C(H_s)$ gdzie G_t i H_s są otwarte w X.

Pokażemy, że z tego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone.

Połóżmy: $F_0 = X - \bigcup_s H_s$. Wówczas dla każdego s jest: $F_0 \cap H_s = \emptyset$.

Oznacza to, że $F_0 \notin C(H_s)$, ale ponieważ $F_0 \in 2^X$, to $F_0 \in \bigcup_t B(G_t)$.

Istnieje zatem takie t_0, że $F_0 \in B(G_{t_0})$ co jest równoważne faktowi, że

$F_0 \subset G_{t_0}$, skąd: $X - G_{t_0} \subset X - F_0 = \bigcup_s H_s$.

Ponieważ zbiór $X - G_{t_0}$ jest zwarty /jako domknięty podzbiór przestrzeni zwartej/, więc istnieje taki skończony układ wskaźników $s_1, s_2, \ldots, s_n$,

że: $X - G_{t_0} \subset H_{s_1} \cup \ldots \cup H_{s_n}$ /I/

Pokażemy, że $2^X = B(G_{t_0}) \cup C(H_{s_1}) \cup \ldots \cup C(H_{s_n})$ /II/

co zakończy dowód.

Niech $F \in 2^X$ będzie dowolnym, ustalonym podzbiorem. Możliwe są dwa przypadki:

/i/ $F \subset G_{t_0}$, wtedy $F \in B(G_{t_0})$

/ii/ $F \not\subset G_{t_0}$, wtedy $F \cap (X - G_{t_0}) \neq \emptyset$

Wówczas z /I/ wynika istnienie takiego wskaźnika s_i, że $F \cap H_{s_i} \neq \emptyset$.

Oznacza to, że w obu przypadkach F należy do prawej strony równości /II/.

Ponieważ zbiór F był dowolnym z rodziny 2^X, więc równość /II/ jest wykazana.

cbdo.

Twierdzenie 2. Niech X będzie przestrzenią T_1. Wówczas jeżeli przestrzeń 2^X jest zwarta, to przestrzeń X jest również zwarta.

Dowód. Niech $\{G_t\}_{t \in T}$ będzie pokryciem otwartym przestrzeni X. Wówczas:

$2^X - \emptyset = \bigcup_{t \in T} C(G_t)$. Ponieważ $2^X - \emptyset$ jest zwarty z założenia, to:

$2^X - \emptyset = C(G_{t_1}) \cup \ldots \cup C(G_{t_n})$. Pokażemy, że: $X = G_{t_1} \cup \ldots \cup G_{t_n}$ /I/

Niech x_0 będzie dowlnym ustalonym punktem przestrzeni X. Wówczas $\{x_0\} \in 2^X$ jako, że X jest przestrzenią T_1. Wynika stąd, że $\{x_0\} \subset C(G_{t_1}) \cup \ldots \cup C(G_{t_n})$ wtwdy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $j \leqslant n$ zachodzi: $\{x_0\} \subset C(G_{t_j})$, a to z kolei oznacza, że $x_0 \in G_{t_j}$. Ponieważ x_0 był dowolnym punktem przestrzeni X, więc równość /I/ jest wykazana.

cbdo.

Twierdzenie 3. Jeżeli X jest przestrzenią regularną, to 2^X jest przestrzenią Hausdorffa.

Dowód. Zauważmy, że w przestrzeni 2^X z topologią Vietorisa dowolny zbiór otwarty ma postać:

$$(U_1, \dots, U_k) = \{ B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \ \wedge \ B \cap U_i \neq \emptyset \ \ i = 1,\dots,k \}$$

gdzie zbiory U_i są otwarte w X.

Załóżmy, że przestrzeń X jest regularna. Niech $A,B \in 2^X$ i $B - A \neq \emptyset$. Wtedy istnieje $x \in X$: $x \in B - A$ i istnieją zbiory U,V otwarte w przestrzeni X takie, że $A \subset U$, $x \in V$ i $U \cap V = \emptyset$.
Otrzymamy, że $A \in (U)$, $B \in (X,V)$ i $(U) \cap (X,V) = \emptyset$, gdzie zbiory (U) i (X,V) są otwarte w 2^X, co dowodzi, że 2^X jest przestrzenią Hausdorffa.

cbdo.

Twierdzenie 4. Jeżeli X jest przestrzenią T_1 i 2^X jest przestrzenią Hausdorffa, to X jest przestrzenią regularną.

Dowód. Załóżmy, że przy powyższych założeniach X nie jest przestrzenią regularną, tzn. istnieje zbiór $A = \overline{A} \subset X$ i istnieje punkt $x \in X$: $x \notin \overline{A}$, że dla dowolnych zbiorów U,V otwartych w X i takich, że $A \subset U$ i $x \in V$ jest: $U \cap V \neq \emptyset$.
$A \in 2^X$, $A \cup \{x\}$ 2^X i tych dwóch punktów nie można oddzielić w 2^X zbiorami otwartymi. Istotnie, weźmy dowolne otoczenia: $(U_1,\dots,U_n)$ punktu A i $(V_1,\dots,V_m)$ punktu $A \cup \{x\}$. Jest:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \quad \wedge \quad U_i \cap A \neq \emptyset \quad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n$$

$$A \cup \{x\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_j \quad \wedge \quad V_j \cap (A \cup \{x\}) \neq \emptyset \quad \text{dla} \quad j = 1,\dots,m$$

Oznaczmy: $I = \{ j : x \in V_j \}$, $I \neq \emptyset$

$$\forall j \in I : \exists p_j \in V_j \cap \Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \Big) \neq \emptyset \ ; \quad \forall j \notin I : A \cap V_j \neq \emptyset$$

Oznaczmy: $K = A \cup \bigcup_{j \in I} p_j$. Oczywiście: $K \in 2^X$.

$K \in (U_1,\dots,U_n) \cap (V_1,\dots,V_m)$ czyli $(U_1,\dots,U_n) \cap (V_1,\dots,V_m) \neq \emptyset$
co jest sprzeczne z założeniem, że 2^X jest przestrzenią Hausdorffa.

cbdo.

Twierdzenie 5. Jeżeli zbiór $\{(x,A) : x \in A\}$ jest domknięty w $X \times 2^X$ dla dowolnego $A \in 2^X$, to przestrzeń X jest regularna.

Dowód. Niech $A_0 \in 2^X$ i $x_0 \notin A_0$. Pokażemy, że istnieją zbiory U,V otwarte w X takie, że $x_0 \in U$, $A_0 \subset V$ i $U \cap V = \emptyset$.
Niech $G = \{ (x,A_0) : x \notin A_0 \}$; mamy: $(x_0,A_0) \in G$. Ponieważ zbiór G jest otwarty w $X \times 2^X$, więc istnieją zbiory $U,G_1,\dots,G_n$ otwarte w X takie, że $(x_0,A_0) \in [U \times (G_1,\dots,G_n)] \subset G$, gdzie $(G_1,\dots,G_n)$ - zbiór otwarty w 2^X.
Czyli $x_0 \in U$ i $A_0 \in (G_1,\dots,G_n)$ tzn. $A_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_i$ i $A_0 \cap G_i \neq \emptyset$ dla $i = 1,\dots,n$.

Przyjmijmy: $V = \quad_{i=1} G_i$. Pokażemy, że $U \quad V = \emptyset$.

Niech $x \quad U \quad V$ i utwórzmy zbiór: $A = A_o \quad x$. $x \quad U$ i $A \quad G_1, \ldots G_n$

stąd: $x, A \quad G$, czyli $x \quad A$, co jest niemożliwe.

cbdo.

Twierdzenie 6. Jeżeli Y jest przestrzenią regularną i $f: X \rightarrow Y$ jest funkcją ciągłą, to zbiór: $\{(x,B): f(x) \in B$ jest domknięty w $X \times 2^Y$.

Dowód. Niech $B \in 2^Y$. Ponieważ Y jest przestrzenią regularną, więc oczywiste jest, że:

$[f(x) \notin B] \equiv [\exists G$ otwarty w $Y : f(x) \in G \wedge B \subset (Y - \bar{G})]$

Zbiór: $\{(x,B): f(x) \notin B\} = \bigcup_G \{(x,B): f(x) \subset G \wedge B \subset (Y - \bar{G})\} =$

$= \bigcup_G [\{x \in X : f(x) \in G\} \times \{B \in 2^Y : B \subset Y - \bar{G}\}]$ jest otwarty w $X \times 2^Y$,

a więc jego dopełnienie jest zbiorem domkniętym.

cbdo.

Twierdzenie 7. Jeżeli funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest ciągła i przekształcenie $F: Y \rightarrow 2^Z$ jest p.c.g /p.c.d/,to przekształcenie $H = F \circ f$ jest również p.c.g /p.c.d/.

Dowód. W przypadku półciągłości z góry przekształcenia F należy pokazać, że dla każdego zbioru U otwartego w Z i takiego, że $F \circ f(x_o) \subset U$ istnieje otoczenie $V(x_o)$ punktu x_o takie, że: $\forall x \in V(x_o) : F \circ f(x) \subset U$, gdzie x_o jest dowolnym punktem przestrzeni X.

Z p.c.g przekształcenia F w punkcie $f(x_o) = y_o \in Y$ wynika, że:

$\forall U$ otwartego w $Z \quad \exists K(y_o)$ takie, że $\forall y \in K : F(y) \subset U$ tzn: $F[f(x_o)] \subset U$.

Z ciągłości f w punkcie x_o wynika, że dla każdego otoczenia $Q[f(x_o)]$ istnieje otoczenie $V(x_o)$ takie, że: $f(V) \subset Q$. Aby otrzymać tezę twierdzenia, wystarczy przyjąć, że: $Q[f(x_o)] = K[f(x_o)]$.

Analogicznie można pokazać półciągłość z dołu przekształcenia H, jeżeli przekształcenie F jest p.c.d.

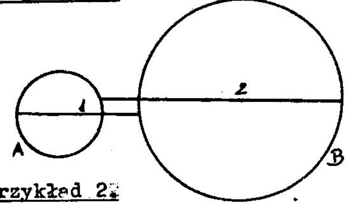
cbdo.

Niech $B(X)$ będzie rodziną domkniętych, ograniczonych i niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej X. W $B(X)$ określamy funkcję, która każdym dwom zbiorom $A,B \in B(X)$ przyporządkowywuje liczbę:

$$\mathrm{dist}(A,B) = \max [\sup_{x \in A} \varrho(x,B), \sup_{x \in B} \varrho(y,A)]$$

gdzie $\varrho(x,B) = \inf_{x \in B} \varrho(x,y)$.

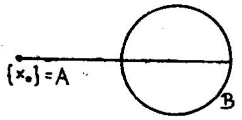
Przykład 1.



$$\sup_{x\in A} \varrho(x,B) = 1 \quad , \quad \sup_{y\in B} \varrho(y,A) = 2$$

$$\operatorname{dist}(A,B) = \max(1,2) = 2$$

Przykład 2.



$$\sup_{x\in A} \varrho(x,B) = \varrho(x_0,B) = 1$$

$$\sup_{y\in B} \varrho(y,A) = 2$$

$$\operatorname{dist}(A,B) = 2$$

Twierdzenie 8. Funkcja dist: $B(X) \times B(X) \to R$ jest metryką w $B(X)$.

Dowód. Niech A i B będą dowolnymi elementami rodziny $B(X)$.
Załóżmy, że $\operatorname{dist}(A,B) = 0$. Wtedy: $\sup_{y\in B} \varrho(y,A) = \sup_{x\in A} \varrho(x,B) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \sup_{y\in B} \varrho(y,A) = 0 \iff \forall y \in B : \ \varrho(y,A) = 0 \iff B \subset A \\ \sup_{x\in A} \varrho(x,B) = 0 \iff \forall x \in A : \ \varrho(x,B) = 0 \iff A \subset B \end{array}\right\} \implies A = B$$

Oczywiste jest, że $\operatorname{dist}(A,B) = \operatorname{dist}(B,A)$.
Pozostaje jeszcze udowodnić prawo trójkąta. Niech $A,B,C \in B(X)$.

$$\operatorname{dist}(A,B) = \max\left[\sup_{x\in A} \varrho(x,B) \ , \ \sup_{y\in B} \varrho(y,A)\right]$$

$$\operatorname{dist}(A,C) = \max\left[\sup_{x\in A} \varrho(x,C) \ , \ \sup_{z\in C} \varrho(z,A)\right]$$

$$\operatorname{dist}(B,C) = \max\left[\sup_{y\in B} \varrho(y,C) \ , \ \sup_{z\in C} \varrho(z,B)\right]$$

Niech x,y,z będą punktami należącymi odpowiednio do zbiorów A,B,C.
jest odległością w X, więc: $\varrho(x,z) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$.
Ponieważ $\varrho(x,C) = \inf_{z\in C} \varrho(x,z)$ więc: $\varrho(x,C) \leqslant \varrho(x,y) + \varrho(y,z)$, stąd

$\varrho(x,C) - \varrho(y,z) \leqslant \varrho(x,y)$ i nierówność ta zachodzi dla każdego $y \in B$,
wobec tego w szczególności: $\varrho(x,C) \leqslant \varrho(x,B) + \varrho(y,z)$.
Z tych samych powodów: $\varrho(x,C) \leqslant \varrho(x,B) + \varrho(y,C) \quad \forall x \in A$
Wobec tego: $\sup_{x\in A} \varrho(x,C) \leqslant \varrho(x,B) + \varrho(y,C) \leqslant \sup_{x\in A} \varrho(x,B) + \sup_{y\in B} \varrho(y,C)$
Analogicznie uzyskujemy nierówność:

$$\sup_{z\in C} \varrho(z,A) \leqslant \sup_{y\in B} \varrho(y,A) + \sup_{z\in C} \varrho(z,B)$$

$$\operatorname{dist}(A,C) \leqslant \max\left[\sup_{x\in A} \varrho(x,B) + \sup_{y\in B} \varrho(y,C) \ ; \ \sup_{y\in B} \varrho(y,A) + \sup_{z\in C} \varrho(z,B)\right] \leqslant$$

$$\max\left[\sup_{x\in A} \varrho(x,B) + \operatorname{dist}(B,C), \ \sup_{y\in B} \varrho(y,A) + \operatorname{dist}(B,C)\right] =$$

$$\max\left[\sup_{x\in A} \varrho(x,B), \ \sup_{y\in B} \varrho(y,A)\right] + \operatorname{dist}(B,C) = \operatorname{dist}(A,B) + \operatorname{dist}(B,C)$$

cbdo.

§5. Ciągłość przekształceń punktowo-zbiorowych.

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. W zbiorze 2^Y wszystkich niepustych i domkniętych podzbiorów przestrzeni Y wprowadzamy topologię Vietorisa.
Przekształcenie $F: X \to 2^Y$ możemy teraz rozpatrywać jako przekształcenie punktowo-punktowe i mówić o jego ciągłości w zwykłym sensie. Znaczy to, że F nazwiemy przekształceniem ciągłym, jeżeli dla każdego zbioru U otwartego w przestrzeni 2^Y jego przeciwobraz: $F^{-1}(U)$ będzie zbiorem otwartym w przestrzeni X.

Twierdzenie 1. Przekształcenie F jest ciągłe jako przekształcenie punktowo-punktowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest p.c.d i p.c.g jako przekształcenie punktowo-zbiorowe.

Dowód. Załóżmy, że F jest p.c.d i p.c.g. Wybierzmy dowolny zbiór:
$$(U_1,\dots,U_k) = \{B \in 2^Y:\ B \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \ \wedge\ B \cap U_i \neq \emptyset \quad i = 1,\dots,k\}$$
otwarty w 2^Y, gdzie zbiory U_i są otwarte w Y.
$$F^{-1}[(U_1,\dots,U_k)] = \{x \in X:\ F(x) \in 2^Y\ ;\ F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ i } F(x) \cap U_i \neq \emptyset \ i=1,\dots,k\}$$
$$= \{x \in X:\ F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i\} \cap \bigcap_{i=1}^{k} \{x \in X:\ F(x) \cap U_i \neq \emptyset\}$$
F p.c.g, to zbiór: $\{x \in X:\ F(x) \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i\}$ jest otwarty w X.
F p.c.d, to zbiór: $\{x \in X:\ F(x) \cap U_i \neq \emptyset\}$ jest otwarty w X $\quad \forall\, i = 1,2,\dots,k$
Wobec tego $F^{-1}[(U_1,\dots,U_k)]$ jest otwarty w X.
Załóżmy teraz, że F jest przekształceniem ciągłym jako przekształcenie punktowo-punktowe, tzn. przeciwobraz każdego zbioru otwartego jest zbiorem otwartym. Wybierzmy dowolny zbiór U otwarty w Y. Zbiór: $\{B \in 2^Y:\ B \subset U\}$ jest otwarty w 2^Y, wobec tego $F^{-1}(\{B \in 2^Y:\ B \subset U\}) = \{x \in X:\ F(x) \subset U\}$ jest otwarty w X, a to oznacza, że F jest p.c.g.
Zauważmy teraz, że jeżeli U jest otwarty w Y, to zbiór: $\{B \in 2^Y:\ B \subset (Y-U)\}$ jest domknięty w 2^Y. Wobec tego przy naszych założeniach zbiór:
$$\{x \in X:\ F(x) \cap U \neq \emptyset\} = X - \{x:\ F(x) \subset (Y-U)\} = F^{-1}\ \{2^Y - \{B \in 2^Y:\ B \subset (Y-U)\}$$
jest otwarty w X, a to oznacza, że F jest p.c.d.

cbdo.

Niech teraz X i Y będą przestrzeniami metrycznymi. Przez 2^X i 2^Y oznaczymy rodziny podzbiorów domkniętych, niepustych i ograniczonych odpowiednio przestrzeni X i Y. W 2^X i 2^Y wprowadzamy metrykę Hausdorffa.
Rozważmy przekształcenie zbiorowo-zbiorowe: $\hat{F}: 2^X \to 2^Y$.

Definicja 1. Mówimy, że przekształcenie $F: 2^X \to 2^Y$ jest ciągłe, jeżeli z warunku: $[A_n \in 2^X,\ A \in 2^X$ i $A_n \to A]$ wynika, że $F(A_n) \to F(A)$.

Twierdzenie 2. Przekształcenie $\hat{F}$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy przekształcenie $F: X \to 2^Y$ jest p.o.g i p.o.d.

Dowód. /a/ Załóżmy, że przekształcenie $\hat{F}$ jest ciągłe. Wybierzmy dowolny ciąg $x_n \to x$: $x_n, x \in X$ i dowolny ciąg $\{y_n\}$: $y_n \in F(x_n)$

Jeżeli $x_n \to x_o$, to $\varrho_x(x_n, x_o) \to 0$, stąd: $\varrho_y(F(x_n), F(x_o)) \to 0$

gdzie ϱ_x i ϱ_y - odległości Hausdorffa odpowiednio w 2^X i w 2^Y

Znaczy to, że: $\max\left[\max\limits_{y \in F(x_n)} d(y, F(x_o)),\ \max\limits_{z \in F(x_o)} d(F(x_n), z)\right] \to 0$, czyli:

$\max\limits_{y \in F(x_n)}(d(y, F(x_o)) \to 0$ i $\max\limits_{z \in F(x_o)} d(F(x_n), z) \to 0$. Wobec czego:

$$\forall \{y_n\}: \quad y_n \in F(x_n) \quad : \quad d(y_n, F(x_o)) \to 0$$

$$\text{i} \quad \forall \{z_n\}: \quad z_n \in F(x_o) \quad : \quad d(z_n, F(x_n)) \to 0 \qquad \text{Stąd:}$$

/1/ dla $\{y_n\}$: $y_n \in F(x_n)$ $\quad \exists \{y_n'\}$: $y_n' \in F(x_o)$ i $\varrho(y_n, y_n) \to 0$

/2/ dla $\{z_n\}$: $z_n \in F(x_o)$ $\quad \exists \{z_n'\}$: $z_n' \in F(x_n)$ i $\varrho(z_n, z_n) \to 0$

Zbiór $F(x_o)$ jest zwarty, $\{y_n'\}: y_n' \in F(x_o) \Longrightarrow \exists \{y_{n_k}'\}: y_{n_k}' \to y' \in F(x_o)$

$\varrho_y(y_n, y_n') \to 0 \Longrightarrow \exists \{y_{n_k}\}: y_{n_k} \to y' \in F(x_o)$, a to oznacza, że przekształcenie F jest p.z.g. Ponieważ ma ono również zwarte zbiory-obrazy, więc jest p.o.g.

Wybierzmy teraz punkt $z_o \in F(x_o)$. Z dowolności ciągu /2/, dla ciągu stałego $z_n = z_o$: $\exists \{z_n'\}$: $z_n' \in F(x_n)$: $\varrho_y(z_o, z_n') \to 0$ co dowodzi półciągłości z dołu przekształcenia F.

/b/ Załóżmy teraz, że przekształcenie F jest p.o.d i p.o.g i przypuśćmy, że przekształcenie $\hat{F}$ nie jest ciągłe, tzn:

$\exists(\{A_n\}, A_o, \mathcal{E} > 0)$: $A_n, A_o \in 2^X$, $\varrho_x(A_n, A_o) \to 0$ i $\varrho_y(F(A_n), F(A_o))$ dla nieskończenie wielu n. Czyli dla nieskończenie wielu n jest:

$\max\left[\max\limits_{y \in F(A_n)}(d(y, F(A_o)),\ \max\limits_{z \in F(A_o)} d(F(A_n), z)\right] > \mathcal{E}$ co zachodzi wtedy i tylko wtedy,

gdy: /1/ $\max\limits_{y \in F(A_n)} d(F(A_o), y) > \mathcal{E}$ lub /2/ $\max\limits_{z \in F(A_o)} d(F(A_n), z) > \mathcal{E}$

dla nieskończenie wielu n. Określmy ciągi:

/I/ $\{y_n\}$: $y_n \in F(A_n)$ i $d(y_n, F(A_o)) = \max\limits_{y \in F(A_n)} d(y, F(A_o))$

/II/ $\{z_n\}$: $z_n \in F(A_o)$ i $d(z_n, F(A_n)) = \max\limits_{z \in F(A_o)} d(z, F(A_n))$

Alternatywa /1/ lub /2/ przybiera więc postać:

/1'/ $d(y_n, F(A_o)) > \mathcal{E}$ lub /2'/ $d(z_n, F(A_n)) > \mathcal{E}$

Co najmniej jeden z tych przypadków zajdzie dla nieskończenie wielu n.

Oznaczmy: $N_1 = \{ n :$ zachodzi /1'/ $\}$

$N_2 = \{ n :$ zachodzi /2'/ $\}$

N_1 i N_2 nie są jednocześnie puste i co najmniej jeden z nich jest nieskończony. Niech N_1 będzie nieskończony, tzn. $d(y_n, F(A_o)) > \mathcal{E}$ dla nieskończenie wielu $n \in N_1$, gdzie $\{y_n\}$ dany jest wzorem /I/.

Dla każdego $y_n \in F(A_n)$ istnieje $x_n \in A_n$ taki, że $y_n \in F(x_n)$.

Z założenia $\varrho_x(A_n, A_o) \longrightarrow 0$ wynika, że $\{x_n\}$ jest zbieżny do pewnego $x_o \in A_o$.

Z /1'/ wynika w szczególności, że $d(y_n, F(x_o)) > \mathcal{E}$. Oznacza to, że dla każdego $y_o \in F(x_o)$: $\varrho_y(y_n, y_o) > \mathcal{E}$ co przeczy półzwartości z góry przekształcenia F.

Niech więc N_2 będzie nieskończony. Ze zwartości $F(A_o)$ wynika, że ciąg $\{z_n\}$ posiada podciąg zbieżny do pewnego $z_o \in F(A_o)$. Istnieje $x_o \in A_o$, że $z_o \in F(x_o)$

Z założenia $\varrho_x(A_n, A_o) \longrightarrow 0$ wynika, że istnieje ciąg $\{x_n\}$: $x_n \in A_n$ i $\varrho_x(x_n, x_o) \longrightarrow 0$. Z /2'/ wynika, że $d(z_n, F(x_n)) > \mathcal{E}$. Jest:

$\varrho_y(z_{n_k}, z'_{n_k}) > \mathcal{E}$ dla $n_k \in N_2$ wobec czego nie istnieje ciąg $\{z'_n\}$: $z'_n \in F(x_n)$ taki, że $\varrho_y(z_n, z_o) \longrightarrow 0$ co przeczy półciągłości z dołu przekształcenia F.

cbdo.

§6. Spójność obrazu zbioru przy przekształceniu punktowo-zbiorowym.

Definicja 1. Przestrzeń topologiczną X nazywamy spójną, jeśli nie można jej rozłożyć na dwa zbiory domknięte, niepuste i rozłączne, tzn:

$[X = A \cup B \ , \ A = \bar{A} \ , \ B = \bar{B} \text{ i } A \neq \emptyset \neq B] \implies A \cap B \neq \emptyset$.

Twierdzenie 1. Następujące warunki są równoważne:

/a/ przestrzeń X jest spójna

/b/ jedynymi podzbiorami domknięto-otwartymi przestrzeni X są zbiór pusty i cała przestrzeń

/c/ jeżeli $X = X_1 \cup X_2$ i zbiory X_1, X_2 są rozgraniczone / tzn: $(\bar{X}_1 \cap X_2) \cup (\bar{X}_2 \cap X_1) = \emptyset$ /, to jeden z nich jest pusty.

/d/ każde przekształcenie ciągłe $f: X \longrightarrow D$ gdzie $D = \{0, 1\}$ jest stałe.

Dowód. 1/ /a/ $\implies$ /b/

Gdyby zbiór $X_1 \subset X$ był podzbiorem domknięto-otwartym różnym od zbioru pustego i całej przestrzeni, to wówczas dla zbioru $X_2 = X - X_1$ zachodziłoby: $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 = \overline{X}_1$, $X_2 = \overline{X}_2$ i $X_1 \neq \emptyset \neq X_2$ co przeczy spójności przestrzeni X.

2/ /b/$\Longrightarrow$/c/

Załóżmy, że $X = X_1 \cup X_2$, gdzie $X_1 \cap \overline{X}_2 = \emptyset = \overline{X}_2 \cap X_1$. Mamy: $\overline{X}_1 \subset X - X_2 \subset X_1$, wobec czego $X_1 = \overline{X}_1$ i podobnie $X_2 = \overline{X}_2$. Ponieważ zbiory X_1 i X_2 są domknięte w X i rozłączne, więc są domknięto-otwarte i na mocy warunku /b/ jeden z nich musi być pusty.

3/ /c/$\Longrightarrow$/d/

Dla dowodu tej implikacji wystarczy zauważyć, że jeśli dla ciągłego przekształcenia $f: X \to D$ mamy: $X_1 = f^{-1}(0) \neq \emptyset$ i $X_2 = f^{-1}(1) \neq \emptyset$, to wobec oczywistych równości: $X = X_1 \cup X_2$ i $X_1 \cap \overline{X}_2 = \emptyset = \overline{X}_1 \cap X_2$ nie zachodzi warunek /c/.

4/ /d/$\Longrightarrow$/a/

Przypuśćmy, że przy założeniu /d/ przestrzeń X nie jest spójna, czyli istnieją zbiory X_1, X_2 domknięte i niepuste takie, że $X = X_1 \cup X_2$ i $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Wtedy przekształcenie:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in X_1 \\ 1 & \text{dla } x \in X_2 \end{cases}$$

jest ciągłe i nie jest stałe.

Twierdzenie 2. Ciągły obraz przestrzeni spójnej jest przestrzenią spójną.

Dowód tego faktu jest natychmiastowy.

Definicja 2. Przestrzeń zwartą i spójną nazywamy continuum.

Definicja 3. Łukiem nazywamy każdy zbiór homeomorficzny z odcinkiem $[0,1]$.

Definicja 4. Przestrzeń topologiczną nazywamy łukowo spójną, jeżeli każda para jej punktów daje się w tej przestrzeni połączyć łukiem.

Twierdzenie 3. Każda przestrzeń łukowo spójna jest spójna.

Dowód. Niech X będzie przestrzenią łukowo spójną. Wybierzmy punkt $x \in X$. Dla każdego punktu $y \in X$ istnieje łuk $\widehat{xy}$. Łuk ten jest zbiorem spójnym jako ciągły obraz odcinka $[0,1]$. Przestrzeń $X = \bigcup_{y \in X} \widehat{xy}$ jest spójna jako suma dowolnej ilości zbiorów spójnych zawierających wspólny punkt.

cbdo.

Definicja 5. Rodzinę zbiorów $K = \{K_\alpha : \alpha \in A\}$ zwartych w przestrzeni X będziemy nazywać rodziną selektywną /względem funkcji $\varphi : X \to R$/ jeżeli dla każdego $\alpha \in A$ istnieje dokładnie jeden element a_α taki, że $a_\alpha \in K_\alpha$ i $\varphi(a_\alpha) = \max_{x \in K_\alpha} \varphi(x)$

<u>Twierdzenie 4.</u> Niech $F: X \longrightarrow 2^Y$ będzie przekształceniem pzg i pcd. Jeżeli rodzina zbiorów $\{F(x):\ x \in X\}$ jest rodziną selektywną, to istnieje przekształcenie ciągłe $\sigma: X \longrightarrow Y$ takie, że $\sigma(x) \in F(x) \quad \forall x \in X$.

<u>Twierdzenie 5.</u> Niech $F: X \longrightarrow 2^Y$ będzie przekształceniem pcd i pcg o spójnych zbiorach obrazach. Wówczas ze spójności przestrzeni X wynika spójność jej obrazu $F(X)$.

<u>Dowód.</u> Przypuśćmy, że $F(X)$ nie jest spójny. Wówczas istnieją zbiory A i B otwarte w $F(X)$ i takie, że: $F(X) = A \cup B$, $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$. Ponieważ $F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$, więc $F(x) \subset A \cup B \quad \forall x \in X$. Z drugiej strony, ze spójności zbiorów obrazów wynika, że $\forall x \in X$ jest: $F(x) \subset A$ albo $F(x) \subset B$. Wobec tego: $X = F^+(A) \cup F^+(B)$ gdzie: $F^+(A) = \{x \in X:\ F(x) \subset A\}$ $F^+(B) = \{x \in X:\ F(x) \subset B\}$. Zbiory $F^+(A)$ i $F^+(B)$ są niepuste, co wynika z niepustości zbiorów A i B, oraz rozłączne i otwarte. Ich otwartość wynika z pcg przekształcenia F i otwartości zbiorów A i B.
Przy rozkładzie $F(X)$ na zbiory A i B domknięte, otrzymamy na mocy pcd przekształcenia F domkniętość zbiorów $F^+(A)$ i $F^+(B)$.
Przeczy to oczywiście spójności przestrzeni X.

cbdo.

<u>Twierdzenie 6.</u> Niech X będzie przestrzenią łukowo-spójną, a $F: X \longrightarrow 2^Y$ przekształceniem ciągłym o spójnych zbiorach obrazach i takim, że rodzina $\{F(x):\ x \in X\}$ jest rodziną selektywną. Wówczas wykres G_F przekształcenia F jest zbiorem spójnym.

<u>Dowód.</u> Wystarczy pokazać, że każda para punktów (x_1, y_1), (x_2, y_2) należących do G_F daje się połączyć zbiorem spójnym zawartym w G_F. Z tw.4 wynika istnienie przekształcenia $\sigma: X \longrightarrow Y$ takiego, że $\tilde{y}_1 = \sigma(x_1) \in F(x_1)$ i $\tilde{y}_2 = \sigma(x_2) \in F(x_2)$. Z łukowej spójności przestrzeni X wynika istnienie ciągłego odwzorowania h przedziału $[0,1]$ w łuk $\overset{\frown}{x_1 x_2}$ łączący punkty x_1 i x_2 zawarty w X. Rozważmy przekształcenie σ zawężone do dziedziny $\overset{\frown}{x_1 x_2}$ i oznaczmy je przez g, tzn. $g: \overset{\frown}{x_1 x_2} \longrightarrow Y$ przy czym $g(x) = \sigma(x) \quad \forall x \in \overset{\frown}{x_1 x_2}$ Biorąc $\tilde{h} = g\, h$ otrzymujemy przekształcenie ciągłe odcinka $[0,1]$ w łuk $\overset{\frown}{(x_1, \tilde{y}_1)(x_2, \tilde{y}_2)}$ zawierający się w G_F. Zbiór będący sumą mnogościową łuku $\overset{\frown}{(x_1, \tilde{y}_1)(x_2, \tilde{y}_2)}$ oraz zbioru spójnego $F(x_1)$ łączącego punkt (x_1, y_1) z punktem $(x_1, \tilde{y}_1)$ i zbioru spójnego $F(x_2)$ łączącego punkt (x_2, y_2) z punktem $(x_2, \tilde{y}_2)$ jest zbiorem spójnym łączącym punkt (x_1, y_1) z punktem (x_2, y_2). Dowodzi to prawdziwości twierdzenia.

cbdo.

§7. Selektory dla przekształceń punktowo-zbiorowych.

Niech będzie dane przekształcenie $F : X \longrightarrow 2^Y$, gdzie 2^Y oznacza rodzinę domkniętych i niepustych podzbiorów przestrzeni topologicznej Y.

Definicja 1. Selektorem przekształcenia F nazywamy odwzorowanie $f:X \longrightarrow Y$ takie, że $\forall x : f(x) \in F(x)$.
Jeżeli ponadto f jest ciągłe, to nazywamy je selekcją dla przekształcenia F.

Powstaje pytanie, przy jakich założeniach o przekształceniu F istnieje dla niego selekcja. Podajemy bez dowodu następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. Niech dane będzie przekształcenie $F:X \longrightarrow 2^Y$. Jeżeli $\forall x \in X$ i $\forall y \in F(x)$ istnieje selekcja dla przekształcenia F taka, że $f(x) = y$, to przekształcenie F jest półciągłe z dołu.

Twierdzenie 2. Niech Y będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Jeżeli przekształcenie $F:X \longrightarrow 2^Y$ jest półciągłe z dołu, to także przekształcenie $\Gamma \circ F$ jest półciągłe z dołu, gdzie $\Gamma(A)$ oznacza domkniętą, wypukłą powłokę A.

Twierdzenie 3. Niech przekształcenie $F:X \longrightarrow 2^Y$ będzie półciągłe z dołu, A zbiorem domkniętym w przestrzeni X, a f niech będzie selekcją dla przekształcenia $F|_A$. Wtedy przekształcenie $G:X \longrightarrow 2^Y$ określone następująco:

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & \text{dla } x \in A \\ F(x) & \text{dla } x \notin A \end{cases}$$

jest półciągłe z dołu.

§8. Problemy.

P1. Niech $A \subset R^n$ będzie zbiorem wypukłym, A_i rzutem zbioru A na podprzestrzeń $x_i = 0$, a $F_i : A_i \longrightarrow 2^R$ przekształceniem określonym w sposób nasępujący: $F_i(x) = \{ y \in R: (x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in A \}$
$x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in A_i$.
Zbadać związki zachodzące między strukturą zbioru A, a własnościami przekształceń F_i $i = 1, \ldots, n$.

Definicja. Niech A będzie zbiorem wypukłym. Funkcjonał $f:A \longrightarrow R$ nazwiemy quasi-wypukłym /quasi-wklęsłym/ jeżeli $U_c = \{ x \in A: f(x) \leqslant c \}$ jest zbiorem wypukłym /wklęsłym/.

P2. Zbiór $A \subset R^n$ będziemy nazywać quasi-wypukłym, jeżeli jego rzuty A_i będą zbiorami wypukłymi, oraz funkcjonały $M_i(x) = \sup\limits_{y \in F_i(x)} y$ będą quasi-wklęsłe, a funkcjonały $m_i(x) = \inf\limits_{y \in F_i(x)} y$ quasi-wypukłe dla $i = 1,\dots,n$.

A_i i F_i są zdefiniowane jak w P1.

Zbadać związki zachodzące między strukturą zbioru A a własnościami przekształceń F_i $i = 1,\dots,n$.

P3. Niech A i B będą podzbiorami przestrzeni skończenie wymiarowej. Przekształcenie $F: A \to 2^B$ nazywać będziemy quasi-wklęsłym, jeżeli jego wykres G_F jest zbiorem quasi-wypukłym.

Zbadać to przekształcenie.

P4. Niech X będzie przestrzenią metryczną, $\varphi: X \to \bar{R}$.
Zbadać przekształcenie $F: X \to 2^{\bar{R}}$ określone wzorem:

$$F(x) = \{ y \in \bar{R} : \ y = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) \text{ dla pewnego } x_n \to x$$

ROZDZIAŁ III

O ZBIEŻNOŚCI CIĄGU PRZEKSZTAŁCEŃ PUNKTOWO - ZBIOROWYCH

§1. Granica topologiczna ciągu zbiorów i jej związek z topologicznymi własnościami przekształceń punktowo-zbiorowych.

Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

Definicja 1. Dolną granicą topologiczną ciągu zbiorów $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \subset X$ nazywamy zbiór:

$$\mathrm{Li}\, A_n = \{p \in X : \quad \forall V(p) \quad \exists N : \quad \forall n > N \quad V(p) \cap A_n \neq \emptyset$$

gdzie $V(p)$ jest otoczeniem punktu p.

Twierdzenie 1. Dolna granica topologiczna ciągu zbiorów posiada następujące własności:

/1/ $\overline{\mathrm{Li}\, A_n} = \mathrm{Li}\, A_n = \mathrm{Li}\, \overline{A_n}$

/2/ $A_n \subset B_n \Longrightarrow \mathrm{Li}\, A_n \subset \mathrm{Li}\, B_n$

/3/ $\mathrm{Li}\, A_n \cup \mathrm{Li}\, B_n \subset \mathrm{Li}\, (A_n \cup B_n)$

/4/ $\mathrm{Li}\, (A_n \cap B_n) \subset \mathrm{Li}\, A_n \cap \mathrm{Li}\, B_n$

/5/ $\mathrm{Li}\, (A_n \times B_n) = \mathrm{Li}\, A_n \times \mathrm{Li}\, B_n$

/6/ $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n+k} \subset \mathrm{Li}\, A_n$

/7/ $A_n = A \Longrightarrow \mathrm{Li}\, A_n = \overline{A}$

Dowód. /1/ $p \in \mathrm{Li}\, \overline{A_n} \Longrightarrow \forall V(p) \quad \exists N: \quad \forall n > N \quad V(p) \cap \overline{A_n} \neq \emptyset$

$V(p)$ jest zbiorem otwartym więc: $V(p) \cap A_n \neq \emptyset$, stąd $p \in \mathrm{Li}\, A_n$.

Mamy więc: $\mathrm{Li}\, \overline{A_n} = \mathrm{Li}\, A_n \subset \overline{\mathrm{Li}\, A_n}$.

$p \in \overline{\mathrm{Li}\, A_n} \Longrightarrow \forall V(p): \ V(p) \cap \mathrm{Li}\, A_n \neq \emptyset \Longrightarrow \forall V(p) \quad \exists x \in V(p) \cap \mathrm{Li}\, A_n \Longrightarrow$

$\forall V(x) \quad \exists N: \ \forall n > N \quad V(x) \cap A_n \neq \emptyset \quad$ i $\quad \exists V(x) \subset V(p) \quad \Longrightarrow$

$\forall V(p) \quad \exists N: \ \forall n > N \quad V(p) \cap A_n \neq \emptyset \Longrightarrow p \in \mathrm{Li}\, A_n$

Stąd: $\overline{\mathrm{Li}\, A_n} \subset \mathrm{Li}\, A_n$, wobec czego: $\mathrm{Li}\, \overline{A_n} = \mathrm{Li}\, A_n = \overline{\mathrm{Li}\, A_n}$

/2/ Niech $A_n \subset B_n$.

$p \in Li\, A_n \Longrightarrow \forall V(p)\ \exists N: \ \forall n > N \ \ V(p) \cap A_n \neq \emptyset \Longrightarrow V(p) \cap B_n \neq \emptyset \Longrightarrow$

$p \in Li\, B_n$.

Własności /3/ i /4/ są prostymi wnioskami z własności /2/

/5/ Łatwo zauważyć, że $p \in Li\,(A_n \times B_n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = (a,b)$ gdzie $a \in Li\, A_n$, $b \in Li\, B_n$

/6/ Niech $p \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n+k}$ i $p \notin Li\, A_n$, tzn. $\exists V(p): \ V(p) \cap A_n = \emptyset$ dla $n = N, N+1, \ldots$ czyli $p \notin A_n$ dla $n = N, N+1, \ldots \Longrightarrow p \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n+k}$.

ponieważ $p \notin \bigcap_{k=1} A_{n+k}$ dla $n = 1,2,3,\ldots$

Własność /7/ jest oczywista.

cbdo.

Definicja 2. Górną granicą topologiczną ciągu zbiorów $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \subset X$ nazywamy zbiór:

$$\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} A_n = \{ p \in X : \ \forall V(p) \ \ \exists \text{ podciąg } \{A_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ ciągu } \{A_n\}_{n=1}^{\infty} : \ A_{n_k} \cap V(p) \neq \emptyset \}$$

Twierdzenie 2. Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami zbiorów przestrzeni topologicznej X. Górna granica topologiczna ciągu zbiorów posiada następujące własności:

/1/ $\overline{Ls\, A_n} = Ls\, A_n = Ls\, \bar{A}_n$

/2/ $A_n \subset B_n \Longrightarrow Ls\, A_n \subset Ls\, B_n$

/3/ $Ls\,(A_n \cup B_n) = Ls\, A_n \cup Ls\, B_n$

/4/ $Ls\,(A_n \cap B_n) \subset Ls\, A_n \cap Ls\, B_n$

/5/ $Ls\,(A_n \times B_n) \subset Ls\, A_n \times Ls\, B_n$

/6/ $Ls\, A_n \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n+k}} \right)$

/7/ $A_n = A \Longrightarrow Ls\, A_n = \bar{A}$

/8/ $Ls(A_n \cup B_n) \subset Li\, A_n \cup Li\, B_n \cup Ls\,(A_n \cap B_n)$

Dowody tych własności, podobnie jak w twierdzeniu 1 są bardzo proste.

Definicja 3. Jeżeli $\operatorname*{Li}_{n\to\infty} A_n = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} A_n$ to piszemy: $\operatorname*{Lt}_{n\to\infty} A_n = \operatorname*{Li}_{n\to\infty} A_n = \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} A_n$ i zbiór $Lt\, A_n$ nazywamy granicą topologiczną ciągu zbiorów $A_1, A_2, \ldots$.

Jeżeli dla ciągu $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ istnieje granica topologiczna $Lt A_n$, to mówimy, że ciąg A_n jest zbieżny.

Twierdzenie 3. $LtA_n = \overline{LtA_n} = Lt\bar{A}_n$

Twierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z tw.1 i tw.2.

Twierdzenie 4. Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami zbiorów przestrzeni topologicznej X. Jeżeli ciągi A_n i B_n są zbieżne, to:

$$Lt(A_n \cup B_n) = LtA_n \cup LtB_n$$

Dowód. Oczywiste jest, że $\forall \{A_n\}_{n=1} : LiA_n \subset LsA_n$.
Korzystając z twierdzeń 1 i 2 otrzymujemy:
$Ls(A_n \cup B_n) = LsA_n \cup LsB_n = LiA_n \cup LiB_n \subset Li(A_n \cup B_n) \subset Ls(A_n \cup B_n)$
Stąd: $LtA_n \cup LtB_n = LiA_n \cup LiB_n = LsA_n \cup LsB_n = Ls(A_n \cup B_n) = Li(A_n \cup B_n)$
$= Lt(A_n \cup B_n)$ cbdo.

Uwaga. Istnienie granicy $Lt(A_n \cup B_n)$ i jednej z granic np. LtA_n nie gwarantuje istnienia granicy LtB_n. Zilustrzjemy to na następującym przykładzie:
Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami zbiorów przestrzeni R^1 określonymi w następujący sposób:

$$n: \quad A_n = \{0\} \quad ; \quad B_n = \begin{cases} \{0\} & \text{dla n parzystych} \\ \emptyset & \text{dla n nieparzystych} \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $LtA_n = \{0\}$, $Lt(A_n \cup B_n) = \{0\}$, natomiast nie istnieje granica LtB_n gdyż $LiB_n = \emptyset$, $LsB_n = \{0\}$.

Twierdzenie 5. Jeżeli $A_n = A$, to $LtA_n = \bar{A}$.

Twierdzenie to jest wnioskiem z tw.1 i tw.2

Twierdzenie 6. Jeżeli ciąg $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiorów przestrzeni topologicznej X jest ciągiem wstępującym: $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, to $LtA_n = \overline{\bigcup_{n \in N} A_n}$

Dowód. $x \in \overline{\bigcup_{n\in N} A_n} \iff \forall V(x) : V(x) \cap \bigcup_{n\in N} A_n \neq \emptyset \iff$
$\forall V(x): \bigcup_{n\in N} (V(x) \cap A_n) \neq \emptyset \iff \forall V(x) \; \exists m \in N: \; V(x) \cap A_m \neq \emptyset \iff$
$\forall V(x) \; \exists m: \; \forall n > m \; V(x) \cap A_m \neq \emptyset \iff x \in LiA_n$.
Trzeba jeszcze pokazać, że LtA_n istnieje, czyli że $LiA_n = LsA_n = LtA_n$.
Oczywiste jest, że $LiA_n \subset LsA_n$. Jest też $LsA_n \subset LiA_n$ ponieważ:
$p \in LsA_n \Longrightarrow \forall V(p) \; \exists \{A_{n_k}\} : A_{n_k} \cap V(p) \neq \emptyset \Longrightarrow \forall V(p) \; \exists n_k: \; \forall n > n_k$
$A_n \cap V(p) \neq \emptyset \Longrightarrow p \in LiA_n$

cbdo.

<u>Twierdzenie 7.</u> Jeżeli ciąg $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ zbiorów przestrzeni topologicznej X jest ciągiem zstępującym: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, to $LtA_n = \bigcap_{n\in N} \overline{A}_n$.

<u>Dowód.</u> $LiA_n \subset LsA_n \subset \bigcap_{n\in N} \overline{\bigcup_{m\in N} A_{n+m}} = \bigcap_{n\in N} \overline{A}_n$

Pierwsza z tych relacji jest oczywista, druga wynika z punktu /6/ tw.2
$p \in \bigcap_{n\in N} \overline{A}_n \Longrightarrow \forall n \in N \quad p \in \overline{A}_n \Longrightarrow \forall n \in N$ i $\forall V(p): \ V(p) \cap A_n \neq \emptyset \Longrightarrow$
$p \in LiA_n$, wobec czego: $LiA_n = LsA_n = LtA_n = \bigcap_{n\in N} \overline{A}_n$

cbdo.

<u>Twierdzenie 8.</u> Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami zbiorów przestrzeni topologicznej X. Jeżeli ciągi te są zbieżne, to:

$$Lt(A_n \times B_n) = LtA_n \times LtB_n$$

<u>Dowód.</u> Oczywiste jest, że $Li(A_n \times B_n) \subset Ls(A_n \times B_n)$.
$Ls(A_n \times B_n) \subset LsA_n \times LsB_n = LiA_n \times LiB_n = Li(A_n \times B_n)$.

cbdo.

<u>Uwaga.</u> Istnienie granicy $Lt(A_n \times B_n)$ i np. granicy LtA_n, nie gwarantują istnienia granicy LtB_n. Świadczy o tym następujący przykład:
Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ będą ciągami zbiorów przestrzeni R^1 określonymi w sposób następujący:

$$\forall n \quad A_n = \emptyset \quad ; \quad B_n = \begin{cases} \emptyset & \text{dla n parzystych} \\ \{0\} & \text{dla n nieparzystych} \end{cases}$$

Łatwo zauważyć, że $LtA_n = \emptyset$, $Lt(A_n \times B_n) = LtA_n = \emptyset$, nie istnieje natomiast granica LtB_n ponieważ: $LiB_n = \emptyset$, $LsB_n = \{0\}$.

<u>Twierdzenie 9.</u> Jeżeli przestrzeń topologiczna X spełnia I aksjomat przeliczalności, a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem jej zbiorów, to:

$$\underset{n\to\infty}{Li} A_n = \{x \in X : \quad \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \ x_n \in A_n, \ x_n \longrightarrow x\}$$

<u>Dowód.</u> Oznaczmy: $M = \{x \in X: \ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}: \ x_n \in A_n, \ x_n \longrightarrow x\}$
Pokażemy, że $M \subset LiA_n$.
Niech $x \in M$. Istnieje zatem ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że $x_n \in A_n$ i $x_n \longrightarrow x$, znaczy to, że dla każdego otoczenia $V(x)$ punktu x, istnieje wskaźnik N taki, że: $\forall n > N \quad x_n \in V(x)$. Zatem dla $n > N$: $V(x) \cap A_n \neq \emptyset$ czyli: $x \in LiA_n$.
Dowiedziemy teraz inkluzji: $LiA_n \subset M$.
Niech $x \in LiA_n$ i niech $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie bazą w punkcie x spełniającą wa-

runek: $B_{k+1} \subset B_k$. Z założenia wynika, że taka baza istnieje.

Z definicji $\mathrm{Li}A_n$ mamy:

$\forall k = 1,2,\ldots \quad \exists N_k: \quad \forall n > N_k \qquad B_k \cap A_n \neq \emptyset$ /I/

Zauważmy, że można tak wybrać $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ aby:

$N_{k+1} > N_k$ /II/

Z /I/ i /II/ otrzymujemy:

$\forall k \quad \exists x_{n_k+i} \in B_k \cap A_{N_k+i} \qquad i = 1,\ldots,N_{k+1} - N_k$ /III/

Wybierając w sposób dowolny $x_n \in A_n$ dla $n = 1,2,\ldots,N_1$ mamy z /III/ określony ciąg $\{x_n\}_{n=1}$: $x_n \in A_n$. Oczywiste jest, że $x_n \to x$, zatem $x \in M$.

cbdo.

Wniosek. W dowolnej przestrzeni topologicznej X prawdziwa jest inkluzja:

$$\{x \in X: \ \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \ x_n \in A_n, \ x_n \to x\} \subset \operatorname*{Li}_{n\to\infty} A_n$$

Twierdzenie 10. Jeżeli przestrzeń topologiczna X spełnia I aksjomat przeliczalności, a $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciagiem jej zbiorów, to:

$$\operatorname*{Ls}_{n\to\infty} A_n = \{x \in X: \ \exists \text{podciąg liczb naturalnych } \{n_k\}_{k=1}^{\infty}: x_{n_k} \in A_{n_k}, \ x_{n_k} \to x$$

Dowód. Oznaczmy: $M = \{x \in X: \ \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \ x_{n_k} \in A_{n_k}, \ x_{n_k} \to x$.

Pokażemy, że $M \subset \mathrm{Ls}A_n$.

Niech $x \in M$. Wtedy $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$: $x_{n_k} \in A_{n_k}$, $x_{n_k} \to x$.

Zatem dla każdego otoczenia $V(x)$ punktu x istnieje wskaźnik K taki, że $\forall k > K \quad x_{n_k} \in V(x)$, zatem $x_{n_k} \in V(x) \cap A_{n_k}$ czyli $V(x) \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ dla $k > K$, wobec czego $x \in \mathrm{Ls}A_n$.

Dowiedziemy teraz inkluzji: $\mathrm{Ls}A_n \subset M$.

Niech $x \in \mathrm{Ls}A_n$ i niech $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ będzie bazą otoczeń punktu x. Z definicji górnej granicy topologicznej mamy: $\forall k: \ B_k \cap A_n \neq \emptyset$ dla nieskończenie wielu n. W szczególności $\exists n_k : \ B_k \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ /i/

Zauważmy, że można zawsze wybrać n_{k+1} tak, aby $n_{k+1} > n_k$.

Z /i/ wynika, że: $\forall k \quad \exists x_{n_k} \in B_k \cap A_{n_k}$. Zatem $x_{n_k} \in B_k$ skąd: $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ i $x_{n_k} \in A_{n_k}$ wobec czego $x \in M$.

cbdo.

Wniosek. Jeżeli X jest dowolną przestrzenią topologiczną, to prawdziwa jest inkluzja:

$$\{x \in X: \ \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \ x_{n_k} \in A_{n_k}, \ x_{n_k} \to x\} \subset \operatorname*{Ls}_{n\to\infty} A_n$$

Niech $B(X)$ będzie rodziną domkniętych, ograniczonych i niepustych podzbiorów przestrzeni metrycznej X. W $B(X)$ wprowadzamy metrykę Hausdorffa:

$$\forall A,B \in B(X): \quad \operatorname{dist}(A,B) = \max[\sup_{x\in A} d(x,B),\ \sup_{y\in B} d(y,A)]$$

Twierdzenie 11. Niech $A \in B(X)$ i $A_n \in B(X)$ dla $n = 1,2,\dots$.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(A_n,A) = 0$, to $\operatorname{Lt}_{n\to\infty} A_n = A$

Dowód. Wystarczy pokazać, że $A \subset \operatorname{Li}A_n \subset \operatorname{Ls}A_n \subset A$.

Niech p będzie dowolnym punktem należącym do zbioru A, a $V(p)$ jego dowolnym otoczeniem. Punkt p zawiera się w swoim otoczeniu $V(p)$ wraz z pewną kulą $K(p,\delta)$. Z tego, że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(A_n,A) = 0$ wynika, że:

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N: \quad \forall n > N \quad \operatorname{dist}(A_n,A) < \varepsilon$ wobec czego:

/1/ $\forall p \in A: \quad d(p,A_n) < \varepsilon$ dla $n > N$

/2/ $\forall a \in A_n: \quad d(a,A) < \varepsilon$ dla $n > N$

Przyjmijmy $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Dla tak wybranego ε istnieje $\overline{N}$ takie, że:

$\forall n > \overline{N} \quad \operatorname{dist}(A_n,A) < \frac{\delta}{2}$ czyli: $d(p,A_n) < \frac{\delta}{2}$ dla $n > \overline{N}$

i $\inf_{a\in A_n} \varrho(p,a) < \frac{\delta}{2}$ dla $n > \overline{N}$

Ponieważ $\forall n \quad A_n = \overline{A}_n$, więc $\forall n \quad \exists \bar{a} \in A_n : \quad \inf_{a\in A_n} \varrho(p,a) = \varrho(p,\bar{a})$

Jest: $\varrho(p,\bar{a}) < \frac{\delta}{2}$, czyli $\bar{a} \in K(p,\delta) \subset V(p)$. Wobec tego zgodnie z definicją $\operatorname{Li}A_n$: $p \in \operatorname{Li}A_n$.

Inkluzja $\operatorname{Li}A_n \subset \operatorname{Ls}A_n$ jest oczywista.

Niech teraz $p \in \operatorname{Ls}A_n$. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbiorów przestrzeni metrycznej, więc na mocy twierdzenia 10 mamy:

$$\operatorname{Ls}_{n\to\infty} A_n = \{x \in X: \quad \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \quad x_{n_k} \in A_{n_k} , \quad x_{n_k} \longrightarrow x\}$$

Wobec tego dla $p \in \operatorname{Ls}A_n$: $\exists \{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \quad p_{n_k} \in A_{n_k}$ i $\lim_{k\to\infty} p_{n_k} = p$.

Wiemy, że $\operatorname{dist}(A_{n_k},A) \to 0$, a więc $d(p_{n_k},A) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Oczywiste jest, że: $0 \leqslant d(p,A) \leqslant \varrho(p_{n_k},p) + d(p_{n_k},A)$.

Dla $k \to \infty$ mamy więc: $d(p,A) \to 0$ co świadczy o tym, że $p \in \overline{A} = A$.

cbdo.

Zauważmy, że w ogólnym przypadku implikacja odwrotna: $\operatorname{Lt}A_n = A \implies \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist} A_n,A = 0$ niw jest prawdziwa. Świadczy o tym następujący przykład:

Niech $X = [0,1)$ z metryką euklidesową.

$\forall n : \quad A_n = [0,\frac{1}{2}] \cup \{1 - \frac{1}{n}\} \quad ; \quad A = [0,\frac{1}{2}]$

Zbiory A_n i A są zwarte. $\mathrm{Lt}A_n = [0,\frac{1}{2}]$, ale $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{dist}(A_n,A) = 1$.

W przykładzie tym przestrzeń X nie jest zwarta!

Twierdzenie 12. Niech $A \in B(X)$ i $A_n \in B(X)$ dla $n = 1,2,\ldots$.

Jeżeli przestrzeń X jest zwarta, to prawdziwa jest implikacja:

$$[\mathrm{Lt}\, A_n = A] \Longrightarrow [\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(A_n,A) = 0]$$

Dowód. Przypuśćmy, że $\mathrm{Lt}A_n = A$ i $\lim\limits_n \mathrm{dist}(A_n,A) \neq 0$. Znaczy to, że istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $\mathrm{dist}(A_n,A) > \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n .

Z definicji $\mathrm{dist}(A_n,A)$ otrzymujemy:

/I/ $\max\limits_{x\in A_n} d(x,A) > \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n

lub /II/ $\max\limits_{y\in A} d(y,A_n) > \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n

Przypuśćmy, że zachodzi /I/. Wybierzmy ciąg $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in A_n$ tak, aby $d(x_n,A) = \max\limits_{x\in A_n} d(x,A) > \varepsilon$. Ze zwartości przestrzeni X wynika, że

$\exists \{x_{n_k}\}: x_{n_k} \longrightarrow x \in X$. Wobec tego $d(x,A) \geqslant \varepsilon$ stąd: $x \notin A$, ale

$x_{n_k} \in A_{n_k}$ i $x_{n_k} \longrightarrow x$, więc $x \in A = \mathrm{Lt}A_n$.

Przypuśćmy więc, że zachodzi /II/. Wybierzmy $y_n \in A$ tak, aby:

$d(y_n,A_n) = \max\limits_{y\in A} d(y,A_n) > \varepsilon$ /i/

Ze zwartości A: $\exists \{y_{n_k}\}: y_{n_k} \longrightarrow y \in A$. $\mathrm{Lt}A_n = A$, więc $\exists\{z_n\}: z_n \in A_n$ i $z_n \longrightarrow y$, w szczególności: $z_{n_k} \longrightarrow y$ ale $d(y_n,A_n) \leqslant \varrho(y_n,z_n)$ oraz

$d(y_{n_k},A_{n_k}) \leqslant \varrho(y_{n_k},z_{n_k})$ /ii/

Z ciągłości funkcji ϱ w X X oraz z prawa trójkąta otrzymujemy z /ii/: $d(y_{n_k},A_{n_k}) \longrightarrow 0$ przy $k \to \infty$ a to jest sprzeczne z /i/ a więc i z /II/.

Zatem nie może zachodzić ani /I/ ani /II/ co dowodzi prawdziwości twierdzenia.

cbdo.

Niech teraz X i Y będą przestrzeniami metrycznymi, a 2^Y rodziną wszystkich podzbiorów przestrzeni Y. Będziemy rozpatrywać przekształcenie $F: X \longrightarrow 2^Y$.

Twierdzenie 13. Przekształcenie F jest domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy $[x_n \longrightarrow x] \Longrightarrow \mathrm{Ls}\, F(x_n) \subset F(x) \quad \forall\, x \in X$

Dowód. 1/ Niech przekształcenie F będzie domknięte i niech $x_n \longrightarrow x \in X$

Wybierzmy dowolny punkt $y \in \mathrm{Ls}F(x_n)$. Wtedy istnieje podciąg $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$:

$y_{n_k} \in F(x_{n_k})$ ciągu $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$: $y_n \in F(x_n)$ taki, że $y_{n_k} \to y$.
Z domkniętości przekształcenia F wynika: $[x_{n_k} \to x,\ y_{n_k} \in F(x_{n_k}),\ y_{n_k} \to y]$:
$y \in F(x)$. Mamy więc: $LsF(x_n) \subset F(x)$.
2/ Niech teraz będzie spełnony warunek: $[x_n \to x] \Rightarrow LsF(x_n) \subset F(x)\ \forall x \in X$
Wówczas mamy: $[x_n \to x,\ y_n \in F(x_n),\ y_n \to y] \Rightarrow y \in LsF(x_n) \subset F(x)$
co świadczy o domkniętości przekształcenia F.
cbdo.

Twierdzenie 14. Przekształcenie F jest półciągłe z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy: $[x_n \to x] \Rightarrow F(x) \subset Li\ F(x_n)$ dla dowolnego $x \in X$.

Dowód. 1/ Niech przekształcenie F będzie pcd i niech $x_n \to x \in X$.
Wybierzmy dowolny punkt $y \in F(x)$. Z półciągłości z dołu przekształcenia F wynika, że istnieje ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$: $y_n \in F(x_n)$ i $y_n \to y$, stąd:
$y \in Li\ F(x_n)$.
2/ Niech teraz będzie spełnony warunek: $[x_n \to x] \Rightarrow F(x) \subset LiF(x_n)$.
Niech $y \in F(x) \subset LiF(x_n)$. Istnieje więc ciąg $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$: $y_n \in F(x_n)$ i $y_n \to y$ co świadczy o półciągłości z dołu przekształcenia F.
cbdo.

Możemy więc sformułować następujący wniosek:

Twierdzenie 15. Przekształcenie F jest p.c.d i domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy: $[x_n \to x] \Rightarrow Lt\ F(x_n) = F(x) \quad \forall x \in X$ /I/
Jeżeli ponadto przestrzeń Y jest zwarta, relacja /I/ przyjmuje postać:
$$\forall x \in X: \quad [x_n \to x] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(F(x_n), F(x)) = 0$$

Rozpatrzmy teraz przekształcenie $F: X \to 2^Y$ przy założeniu, że 2^Y oznacza rodzinę niepustych podzbiorów przestrzeni Y. X i Y niech w dalszym ciągu będą przestrzeniami metrycznymi. Określamy dolną i górną granicę przekształcenia F w dowolnym punkcie $x_0 \in X$:

$$\liminf_{\rho(x,x_0)\to 0} F(x) = \bigcap_{\substack{\{x_n\} \\ \rho(x_n,x_0)\to 0}} Li\ F(x_n) \qquad /1/$$

$$\limsup_{\rho(x,x_0)\to 0} F(x) = \bigcup_{\substack{\{x_n\} \\ \rho(x_n,x_0)\to 0}} Ls\ F(x_n) \qquad /2/$$

Jeżeli zbiory /1/ i /2/ są równe, to piszemy:

$$\lim_{\rho(x,x_0)\to 0} F(x) = \liminf_{\rho(x,x_0)\to 0} F(x) = \limsup_{\rho(x,x_0)\to 0} F(x)$$

Twierdzenie 16. Przekształcenie F jest domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x_0 \in X$: $\limsup_{x \to x_0} F(x) \subset F(x_0)$.

Dowód. Na podstawie twierdzenia 13 : przekształcenie F jest domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ jest: $[x_n \to x_0] \implies LsF(x_n) \subset F(x_0)$. Stąd przekształcenie F jest domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x_0 \in X$: $\bigcup_{\substack{\{x_n\} \\ \varrho(x_n, x_0) \to 0}} LsF(x_n) \subset F(x_0)$

cbdo.

Twierdzenie 17. Przekształcenie F jest półciągłe z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x_0 \in X$: $F(x_0) \subset \liminf_{x \to x_0} F(x)$

Dowód analogiczny z dowodem twierdzenia poprzedniego przy skorzystaniu z twierdzenia 14.
Możemy więc sformułować następujący wniosek:

Twierdzenie 18. Przekształcenie F jest p.c.d i domknięte wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x_0 \in X$: $F(x_0) = \lim_{\varrho(x, x_0) \to 0} F(x)$.

§2. Zbieżność punktowa, ciągła i jednostajna ciągu przekształceń punktowo - zbiorowych.

Niech X i Y będą przestrzeniami metrycznymi z metrykami odpowiednio: ϱ_X i ϱ_Y. Przez 2^Y oznaczymy rodzinę wszystkich niepustych podzbiorów przestrzeni Y. Będziemy rozpatrywać ciąg przekształceń punktowo-zbiorowych: $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, z których każde przyporządkowuje punktom przestrzeni X zbiory z rodziny 2^Y.

Definicja 1. Dolną granicą topologiczną ciągu przekształceń $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ będziemy nazywać przekształcenie $F_{\bullet}: X \to 2^Y$ określone w sposób następujący:

$\forall x \in X$: $F_{\bullet}(x) = \mathrm{Li}\, F_n(x)$

Definicja 2. Górną granicą topologiczną ciągu przekształceń $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ będziemy nazywać przekształcenie $F^{\bullet}: X \to 2^Y$ określone w sposób następujący:

$\forall x \in X$: $F^{\bullet}(x) = \mathrm{Ls}\, F_n(x)$.

Jeżeli w każdym punkcie przestrzeni X zachodzi równość: $F_{\bullet}(x) = F^{\bullet}(x)$, to piszemy: $F = F_{\bullet} = F^{\bullet}$ i mówimy, że ciąg F_n jest zbieżny do przekształcenia F, co oznaczamy: $F_n \to F$.

Twierdzenie 1. /1/ $\forall x \in X: \quad F_{\bullet}(x) \subset F^{\bullet}(x)$

/2/ $F_{\bullet}(x)$ i $F^{\bullet}(x)$ są zbiorami domkniętymi w Y dla dowolnego $x \in X$.

Własności te wynikają z twierdzeń 1 i 2 poprzedniego paragrafu.

Definicja 3. Dolną uogólnioną granicą topologiczną ciągu przekształceń $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy przekształcenie $F_o: X \longrightarrow 2^Y$ określone w sposób następujący: $\forall x \in X \quad F_o(x) = \bigcup\limits_{\substack{\{x_n\} \\ \varrho_X(x_n,x) \to 0}} \mathrm{Li}\, F_n(x_n)$

Iloczyn ten bierzemy po wszystkich ciągach $\{x_n\}$ elementów przestrzeni X zbieżnych do x, a czynnik iloczynu dla pojedynczego ciągu $\{x_n\}$ ma postać: $\mathrm{Li}(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3), \dots)$.

Definicja 4. Górną uogólnioną granicą topologiczną ciągu przekształceń $\{F_n\}_{n=1}$ nazywamy przekształcenie $F^o: X \longrightarrow 2^Y$ określone w sposób następujący: $\forall x \in X \quad F^o(x) = \bigcup\limits_{\substack{\{x_n\} \\ \varrho_X(x_n,x) \to 0}} \mathrm{Ls}\, F_n(x_n)$

gdzie sumowanie rozciąga się na wszystkie ciągi $\{x_n\}$ elementów przestrzeni X zbieżnych do x, a dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ składnik sumy jest postaci: $\mathrm{Ls}(F_1(x_1), F_2(x_2), F_3(x_3), \dots)$.

Jeżeli w każdym punkcie przestrzeni X zachodzi równość: $F_o(x) = F^o(x)$, to piszemy: $F = F_o = F^o$ i mówimy, że ciąg przekształceń $\{F_n\}$ jest zbieżny do przekształcenia F w sposób ciągły, co oznaczamy: $F_n \rightrightarrows F$.

Twierdzenie 2.

/1/ $\forall x \in X \quad F_o(x)$ jest zbiorem domkniętym.

/2/ $\forall x \in X: \quad F_o(x) \subset F_{\bullet}(x)$

/3/ $\forall x \in X: \quad F^{\bullet}(x) \subset F^o(x)$

/4/ $\forall x \in X: \quad F_o(x) \subset F^o(x)$

/5/ $F_n \rightrightarrows F \qquad F_n \longrightarrow F$

Dowód. /1/ wynika z faktu, że iloczyn dowolnej mnogości zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

/2/. Wybierzmy dowolny punkt $x \in X$. Niech $y \in F_o(x)$. Wtedy dla dowolnego ciągu $\{x_n\}: \ x_n \longrightarrow x$ jest: $y \in \mathrm{Li} F_n(x_n)$, więc i dla ciągu stałego $\{x\}$:

$y \in \mathrm{Li}F_n(x)$ co znaczy, że $y \in F_\bullet(x)$.

/3/. Ustalmy punkt $x \in X$. Niech $y \in F^\bullet(x)$ co znaczy, że $y \in \mathrm{Ls}F_n(x)$, stąd $y \in \bigcup_{\substack{\{x_n\} \\ \varrho_X(x_n,x)\to 0}} \mathrm{Ls}\, F_n(x_n) = F^0(x)$.

/4/. $y \in F_0(x) \Rightarrow \forall\{x_n\}: \ x_n \to x : \ y \in \mathrm{Li}F_n(x_n) \subset \mathrm{Ls}F_n(x_n)$, więc:
$y \in \bigcup_{\substack{\{x_n\} \\ \varrho_X(x_n,x)\to 0}} \mathrm{Ls}\, F_n(x_n) = F^0(x)$.

/5/. Niech $F_n \rightrightarrows F$. $\forall x \in X$ jest: $F_0(x) \subset F_\bullet(x) \subset F^\bullet(x) \subset F^0(x)$ i $F_0(x) = F^0(x)$ więc i $F_\bullet(x) = F^\bullet(x)$.
cbdo.

Twierdzenie 3. $F_n \rightrightarrows F$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x \in X$ i $\forall\{x_n\}$: $x_n \to x$: $\mathrm{Lt}\, F_n(x_n) = F(x)$.

Twierdzenie to wynika wprost z definicji przekształcenia F.

Twierdzenie 4. Niech $\{F_n\}$ będzie ciągiem przekształceń punktowo-zbiorowych, a $\{G_{F_n}\}$ ciągiem ich wykresów. Jeżeli $F_n \rightrightarrows F$, to $G_F = \mathrm{Lt}\, G_{F_n}$.

Dowód. Niech $F_n \rightrightarrows F$. Jeżeli $(x,y) \in G_F \Rightarrow y \in F(x)$.
$\forall\{x_n\}: \ x_n \in X, \ x_n \to x \quad \exists\{y_n\}: \ y_n \in F(x_n): \ y_n \to y$, a więc $(x_n,y_n) \in G_{F_n}$ i $(x_n,y_n) \to (x,y)$ stąd: $(x,y) \in \mathrm{Li}G_{F_n}$.
Mamy więc: $G_F \subset \mathrm{Li}G_{F_n}$.
Niech $(x,y) \in \mathrm{Li}G_{F_n}$, wtedy $\exists\{(x_n,y_n)\}: \ (x_n,y_n) \in G_{F_n}$ i $(x_n,y_n) \to (x,y)$.
Zatem $x_n \to x$, $y_n \in F_n(x_n)$ i $y_n \to y \in F(x)$, więc $(x,y) \in G_F$ i jest: $\mathrm{Li}G_{F_n} \subset G_F$.
Wystarczy teraz pokazać, że $\mathrm{Ls}\, G_{F_n} \subset \mathrm{Li}\, G_{F_n}$.
Niech $(x,y) \in \mathrm{Ls}G_{F_n}$. Wtedy $\exists\{(x_{n_k},y_{n_k})\}: \ (x_{n_k},y_{n_k}) \in G_{F_{n_k}}$ i $(x_{n_k},y_{n_k}) \to (x,y)$ czyli $\exists\{x_{n_k}\}: \ x_{n_k} \in X$ i $x_{n_k} \to x$ oraz $\exists\{y_{n_k}\}: \ y_{n_k} \in F(x_{n_k})$ i $y_{n_k} \to y$.
Określmy ciąg $\{\tilde{x}_n\}$ w następujący sposób:

$$\tilde{x}_n = \begin{cases} x_{n_k} & \text{dla } n = n_k \\ x & \text{dla } n \neq n_k \end{cases}$$

Jest: $\tilde{x}_n \to x$ i $y_{n_k} \in F_{n_k}(\tilde{x}_{n_k})$: $y_{n_k} \to y \in F(x)$ czyli $(x,y) \in G_F = \mathrm{Li}G_{F_n}$

Implikacja odwrotna na ogół nie jest prawdziwa. Świadczy o tym następujący przykład:

Niech $X = [0,2]$, $Y = [0,2]$, $\forall n:\ F_n(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{dla } x < 1 \\ [0,2] & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$

Widać, że $\mathrm{Lt}G_{F_n} = G_F$ gdzie przekształcenie F ma postać:

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] & \text{dla } x < 1 \\ [0,2] & \text{dla } x \geq 1 \end{cases}$$

Jednocześnie: $F_n \not\Longrightarrow F$ ponieważ $\mathrm{Li}F_n(x_n) = [0,1] \neq F(1) = [0,2]$ dla $x_n < 1$.

Zachodzi jednak twierdzenie następujące:

Twierdzenie 5. Jeżeli $G_F = \mathrm{Lt}\, G_{F_n}$, to $F(x) = F^0(x) = \bigcup\limits_{\substack{\{x_n\} \\ \varrho_X(x_n,x) \to 0}} \mathrm{Li}\, F_n(x_n)$.

Dowód. Oznaczmy: $L(x) = \bigcup\limits_{\substack{\{x_n\} \\ \varrho_X(x_n,x) \to 0}} \mathrm{Li}\, F_n(x_n)$. Oczywista jest inkluzja: $L(x) \subset F^0(x)$

Niech $y \in F^0(x)$. Wtedy $\exists \{x_n\} :\ x_n \to x$ i $\exists \{y_{n_k}\}:\ y_{n_k} \in F_{n_k}(x_{n_k})$ i $y_{n_k} \to y$. Stąd: $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in G_{F_{n_k}}$ oraz $(x,y) \in \mathrm{Ls}G_{F_n} = G_F = \mathrm{Li}G_{F_n}$.

Wobec tego: $\exists \{(x_n,y_n)\}:\ (x_n,y_n) \in G_{F_n}$ i $(x_n,y_n) \to (x,y) \in G_F$ /I/

a to znaczy, że $\exists \{x_n\}:\ x_n \to x$ i $\exists \{y_n\}:\ y_n \in F_n(x_n)$ i $y_n \to y$, czyli $y \in \bigcup\limits_{\substack{\{x_n\} \\ \varrho_X(x_n,x) \to 0}} \mathrm{Li}\, F_n(x_n)$, jest więc: $F^0(x) = L(x)$.

Pokażemy jeszcze, że $L(x) = F(x)$.
Z /I/ mamy: $F^0(x) \subset F(x)$. Jeżeli $y \in F(x)$, to $(x,y) \in G_F$ i jak poprzednio dostajemy: $y \in L(x) = F^0(x)$.

cbdo.

Wniosek. Jeżeli $F_n \Longrightarrow F$, to F jest przekształceniem domkniętym.

Twierdzenie 6. Jeżeli $F_n \to F$ i $F(x_0) = F^0(x_0)$, to F jest przekształceniem domkniętym w punkcie x_0.

Dowód. Niech $x_n \to x_0$, $x_n, x_0 \in X$ i $y_n \to y$, $y_n \in F(x_n)$.
$F_n \to F$, czyli dla dowolnego $x \in X$: $F(x) = \mathrm{Li}F_n(x) = \mathrm{Ls}F_n(x)$, wobec czego: $\forall y_n \in F(x_n)\ \ \exists \{z_n^m\}_{m=1}^{\infty} :\ z_n^m \in F_m(x)$ i $z_n^m \to y_n$ przy $m \to \infty$.
Oznaczmy przez m_n taki wskaźnik m, że: $\varrho_Y(z_n^{m_n}, y_n) < \frac{1}{n}$.
Można go tak dobrać, aby $m_n > m_{n-1}$.

Oznaczmy: $z_{m_n} = z_n^{m_n}$, $\tilde{x}_{m_n} = x_m$ i przyjmijmy:

$$\bar{x}_m = \begin{cases} \tilde{x}_{m_n} & \text{dla } m_n = m \\ x_0 & \text{dla } m_n \neq m \end{cases}$$

Dla dostatecznie dużych n jest:

$\varrho_y(z_{m_n}, y) \leq \varrho_y(z_{m_n}, y_n) + \varrho_y(y_n, y) < \varepsilon$. Jest: $z_{m_n} \to y$, $\bar{x}_m \to x_0$

i $z_{m_n} \in F_{m_n}(\bar{x}_{m_n})$ oraz $F(x_0) = F^0(x_0)$ stąd $y \in F(x_0)$. cbdo.

Niech teraz X i Y będą w dalszym ciągu przestrzeniami metrycznymi. Przez B(X) i B(Y) oznaczymy rodziny podzbiorów niepustych, domkniętych i ograniczonych odpowiednio przestrzeni X i Y. Będziemy rozpatrywać ciąg przekształceń $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$: $F_n: B(X) \to B(Y)$. Przez $dist_x$, $dist_y$ oznaczymy odległości Hausdorffa odpowiednio w przestrzeniach B(X), B(Y).

Definicja 5. Jeżeli prawdziwa jest implikacja:

$$dist_x(A_n, A) \to 0 \implies dist_y(F_n(A_n), F(A)) \to 0$$

to ciąg przekształceń $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazywamy zbieżnym w sensie Hausdorffa do przekształcenia F i piszemy: $F_n \overset{H}{\rightrightarrows} F$.

Twierdzenie 7. Jeżeli $F_n \overset{H}{\rightrightarrows} F$, to $F_n \rightrightarrows F$.

Dowód. Wybierzmy dowolny ciąg $x_n \to x$. Punkty x_n, x możemy traktować jako elementy przestrzeni B(X) ponieważ X jako przestrzeń metryczna jest przestrzenią T_1. Jest więc: $dist_x(x_n, x) \to 0$ i na mocy założenia: $dist_y(F_n(x_n), F(x)) \to 0$. Stąd na mocy twierdzenia 11 z §1 mamy: $LtF_n(x_n) = F(x)$. Stąd $F_n \rightrightarrows F$. cbdo.

Okazuje się, że przy pewnych dodatkowych założeniach twierdzenie odwrotne jest również prawdziwe.

Twierdzenie 8. Niech X i Y będą przestrzeniami zwartymi, ciąg przekształceń $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ niech spełnia warunek: $\forall n$ i $\forall A \in B(X)$: $F_n(A) \in B(X)$.
Niech ponadto $F: B(X) \to B(Y)$.
Jeżeli $F_n \rightrightarrows F$, to $F_n \overset{H}{\rightrightarrows} F$.

Dowód. Niech $F_n \rightrightarrows F$ i przypuśćmy, że nieprawdą jest: $F_n \overset{H}{\rightrightarrows} F$.
Znaczy to, że: $\exists \{A_n\}$: $A_n \in B(X)$ i $\exists A \in B(X)$: $dist_x(A_n, A) \to 0$
i istnieje $\varepsilon > 0$, że:

/1/ $dist_y(F_n(A_n), F(A)) > \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n.

Przechodząc do podciągów możemy założyć, że /1/ zachodzi dla wszystkich n.
Z /1/ mamy:

/I/ $\max_{y\in F_n(A_n)} d(y,F(A)) > \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n.

lub /II/ $\max_{z\in F(A)} d(F_n(A_n),z) > \varepsilon$ dla nieskończenie wielu n.

Jak poprzednio możemy założyć, że /I/ zachodzi dla wszystkich n, lub /II/ zachodzi dla wszystkich n.

Przypuśćmy więc, że dla wszystkich n zachodzi /I/. Znaczy to, że:

$\exists y_n \in F_n(A_n)$: $d(y_n,F(A)) = \max_{y\in F_n(A_n)} d(y,F(A))$

Niech $x_n \in A_n$ i $y_n \in F_n(x_n)$. Y jest przestrzenią zwartą, więc $\exists\{y_{n_k}\}$:

$y_{n_k} \to y_o \in Y$. $\operatorname{dist}_x(A_{n_k},A) \to 0$ stąd $\exists\, x_o \in A$: $\rho_x(x_{n_k},x_o) \to 0$

/rzeczywiście: $x_{n_k} \in X$ i X zwarta, więc $\exists\, x_o \in X$: $x_{n_k} \to x_o$,

zbiór A jest domknięty, więc $x_o \in A$. Bez zmniejszania ogólności rozważań przyjmujemy: $x_{n_k} \to x_o$ /.

Jest: $\exists\{x_{n_k}\}$: $x_{n_k} \to x_o$, $\exists\{y_{n_k}\}$: $y_{n_k} \in F(x_{n_k})$ i $y_{n_k} \to y_o$.

Zdefiniujmy ciąg $\{\bar{x}_n\}$:

$$\bar{x}_n = \begin{cases} x_{n_k} & \text{dla } n = n_k \\ x_o & \text{dla } n \neq n_k \end{cases}$$

Oczywiście $\bar{x}_n \to x_o$ i $\exists\{y_{n_k}\}$: $y_{n_k} \in F_{n_k}(x_{n_k}) = F_{n_k}(\bar{x}_{n_k})$ i $y_{n_k} \to y_o$.

$F_n \rightrightarrows F$, to F jest przekształceniem domkniętym, więc $y_o \in F(x_o)$.

$d(y_{n_k},F(A)) > \varepsilon$ czyli $d(y_o,F(x_o)) \geqslant \varepsilon > 0$ co jest sprzeczne z tym,

że $y_o \in F(x_o)$.

Niech więc dla wszystkich n zachodzi /II/.

$\exists z_n \in F(A)$: $d(z_n,F_n(A_n)) = \max_{z\in F(A)} d(z,F_n(A_n)) > \varepsilon$ /2/

F(A) jest zwarty jako domknięty podzbiór przestrzeni zwartej, więc

$\exists\{z_{n_k}\}$: $z_{n_k} \to z_o \in F(A)$ a to znaczy, że:

$\exists\, x_o \in A$: $z_{n_k} \to z_o \in F(x_o)$ /3/

$\operatorname{dist}_x(A_n,A) \to 0 \implies \exists x_n \in A_n$: $x_n \to x_o$ /ponieważ $\operatorname{dist}_x(A_n,A) \geqslant d(A_n,x_o)$ to $d(A_n,x_o) \to 0$, niech $x_n \in A_n$: $d(A_n,x_o) + \frac{1}{n} > \rho(x_n,x_o)$ stąd $x_n \to x_o$ /.

$F_n \rightrightarrows F$, to dla $z_o \in F(x_o)$ $\exists\{y_n\}$: $y_n \in F_n(x_n)$ i $y_n \to z_o$.

Stąd i z /3/: $\rho_y(z_{n_k},y_{n_k}) \to 0$ co jest sprzeczne z /2/.

cbdo.

<u>Wniosek.</u> Jeżeli X i Y są przestrzeniami zwartymi, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem przekształceń domkniętych oraz $F_n \rightrightarrows F$, to F jest przekształceniem domkniętym i $F_n \xrightarrow{H} F$.

Zauważmy, że ciąg przekształceń $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$: $F_n: B(X) \to B(Y)$ możemy traktować jako ciąg przekształceń punktowo-punktowych i mówić o jego zbieżności w zwykłym sensie. I tak na przykład:
Ciąg przekształceń $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazwiemy zbieżnym jednostajnie do przekształcenia $F: B(X) \to B(Y)$ jeżeli:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \quad \forall n > N \ \text{ i } \ \forall A \in B(X) \qquad \mathrm{dist}_y(F_n(A), F(A)) < \varepsilon$$

SKOROWIDZ SYMBOLI

SKOROWIDZ NAZW

SPIS TREŚCI