Ramanujan

-postać niezwykła

Opracowano na podstawie wprowadzenia do pracy inżynierskiej Pani Anny Car pod tytułem „O pewnych tożsamościach Ramanujana, czyli epizody z ponadczasowego dorobku.” Promotorem tej pracy obronionej z sukcesem był dr inż. Roman Wituła.

Uzupełnień i aktualizacji redakcyjnej dokonały natomiast Julia Przybyła oraz Wiktoria Tomasik. Korektę wykonał Roman Wituła na przełomie 2021/22.

1. Kim był Ramanujan?

Srinivasa Aiyangar Ramanujan

22 grudnia 1887 - 26 kwietnia 1920

Był jednym z największych matematycznych geniuszy. Pochodził i wychował się w Indiach. Jego prace z zakresu teorii liczb oraz badania prowadzone nad funkcjami eliptycznymi, ułamkami łańcuchowymi oraz szeregami nieskończonymi odegrały kluczową rolę w rozwoju wielu dyscyplin matematycznych.

Powyższe zdjęcie pochodzi ze znaczka, który został wydany specjalnie na cześć Ramanujana w 75-tą rocznicę jego urodzin przez Urząd Pocztowy w Indiach.

2. Kalendarium Ramanujana

Rysunek 1: Plan miasta Erode

- **22 grudnia 1887**
  Przyszedł na świat w domu swojej babci w Erode (stan Tamilnadu), w Indiach, jako syn ubogiego księgowego. Jego rodzina była bardzo biedna i nie było jej stać na zapewnienie mu gruntowego wykształcenia.

Rysunek 2: Dom Ramanujana

- **1898**
  Po przeprowadzce z matką do Kumbakonam rozpoczął naukę w tamtejszej Town High School.
- **1900**
  Jego pierwsze bliższe spotkanie z matematyką. Odtąd „pracował” nad

szeregami geometrycznymi i arytmetycznymi. Był w stanie opanować wiele pojęć matematycznych pomimo, że nie miał dostępu do żadnych bardziej zaawansowanych książek poświęconych matematyce. Ramanujan był tak biedny, że swoje wyniki musiał zapisywać na szkolnej tablicy, a następnie tylko końcowe rezultaty przepisywał do notatnika.

- **1902**
  Po raz pierwszy pokazano Ramanujanowi jak rozwiązuje się równania kwadratowe, ale już w wybranych równaniach czwartego i piątego stopnia wprowadzał własne metody.

- **$\sim$ 1902**
  W bibliotece natknął się na książkę zatytułowaną „Streszczenie podstawowych wyników w matematyce teoretycznej" autorstwa G.S.Carr'a. Książka ta zawiera 6000 twierdzeń matematycznych, jednak wszystkie zostały przedstawione bez dowodów. Ramanujan wyznaczył sobie cel - odnalezienie wszystkich brakujących dowodów.
  Pracował nad tym samodzielnie, korzystając z zasobów biblioteki. Książka ta okazała się prawdziwą inspiracją dla młodego geniusza. Po raz pierwszy została opublikowana w roku 1880.

- **1904**
  Badał szereg harmoniczny oraz obliczył stałą Eulera do 15 miejsca po przecinku. Coraz bardziej interesowały go własności liczb. W tym roku uzyskał stypendium jak również rozpoczął naukę w Government College w Kumbakonam.

- **1905**
  Odebrano mu stypendium, z powodu zaniedbywania wszystkich przedmiotów za wyjątkiem matematyki.

- **1906**
  Został przyjęty do Pachayappa's College w Madras. Wnikliwie studiował funkcje eliptyczne. Zachorował po trzech miesiącach przebywania w college'u. Pomimo opuszczenia wielu zajęć (za wyjątkiem matematyki) zdał egzaminy.

- **1908**
  Pogłębiał swoją wiedzę w zakresie szeregów rozbieżnych oraz ułamków łańcuchowych ciągłych. Jego stan zdrowia wyraźnie się pogarszał.

- **14 lipca 1909**
  Ślub zaaranżowany przez jego matkę z dziewięcioletnią S. Janaki Ammal. Jednak Ramanujan zamieszkał ze swoją żoną dopiero, gdy ukończyła 12 rok życia.

- **1910**
  Poznał Diwana Bahadur Ramchandra Rao, jednego z założycieli Indian Mathematical Society. Przez pewien czas wspierał Ramanujana finansowo,

gdyż zdawał sobie sprawę, że ma do czynienia z osobą o nieprzeciętnym talencie.

- **1911**
  Odkrył nowe zależności pomiędzy modularnymi funkcjami eliptycznymi. Po raz pierwszy opublikowano jego pracę na temat liczb Bernoulliego przez Mathematical Society.

- **1912**
  Celem zapewnienia sobie oraz rodzinie środków do życia rozpoczął pracę jako urzędnik w Urzędzie Pocztowym w Madras. W wolnym czasie kontynuował badania matematyczne. Wyniki zapisywał na kartkach, które udało mu się potajemnie wynieść z miejsca pracy.

- **1913**
  Za namową swoich kolegów wysłał wszystkie swoje prace do słynnego matematyka z Anglii Godfrey'a Hardy'ego. Jego wzory okazały się zupełnie nowatorskie z tego powodu, że nie miał on dostępu do jego współczesnych prac w tej dziedzinie. Nie zdawał sobie sprawy, że obok wzorów zupełnie nowych, inne były już znane. W takich okolicznościach wszystkie jego wyniki były całkowicie oryginalne. Pomoc Hardy'ego w karierze matematycznej Ramanujana z perspektywy czasu okazała się nieoceniona. To za jego sprawą Ramanujan otrzymał stypendium na uniwersytecie w Madras, gdzie po raz pierwszy mógł poświęcić swój czas całkowicie na badania.

- **17 marca 1914**
  Ramanujan opuścił Indie celem rozpoczęcia nauki w Trinity College (Cambridge) w Anglii. Hardy przekonany o genialności Ramanujana wykorzystał swoje wpływy w kręgach matematycznych, żeby umożliwić mu przyjęcie na uniwersytet. Tutaj Ramanujan kontynuował swoje badania.

- **16 marca 1916**
  Ukończył studia w Cambridge uzyskując dyplom ukończenia uniwersytetu w dziedzinie „Nauk i badań na wysoce skomplikowanych liczbach"

- **1917**
  Zimny, wilgotny klimat panujący w Anglii niekorzystnie wpływał na zdrowie Ramanujana. Poważnie zachorował na gruźlicę.

- **18 luty 1918**
  Został wybrany członkiem Philosophical Society w Cambridge.

- **2 maja 1918**
  Jako pierwszy Hindus został wybrany członkiem Royal Society of London (instytucja złożona w 1660 roku.)

- **10 października 1918**
  Na okres 6 lat został wybrany członkiem Trinity College w Cambridge.

- **27 luty 1919**
  Ze względu na pogarszający się stan zdrowia powrócił do Indii.
- **26 kwietnia 1920**
  Zmarł w Madrasie

3. Historia pewnej znajomości

Godfrey Harold Hardy

Z kwestii odkrycia Ramanujana jako nadzwyczajnego matematycznego talentu, Hardy wcale nie robił tajemnicy. Napisał, że był to jedyny romantyczny incydent w jego życiu; w każdym razie jest to wspaniała historia, i to taka, w której zasługi spadają całą lawiną na prawie wszystkich (z dwoma wyjątkami) jej bohaterów. Pewnego ranka na początku 1913 roku Hardy znalazł wśród listów leżących na stole obok śniadania, wymiętą kopertę ozdobioną indyjskimi znaczkami. Gdy ją otworzył, znalazł w niej kartki nie pierwszej świeżości, zapisane odręcznie rzędami obcojęzycznych symboli. Hardy zerknął na nie bez entuzjazmu. Był już wtedy, w wieku trzydziestu sześciu lat, światowej sławy matematykiem, a światowej sławy matematycy, jak już zdążył zauważyć, są wyjątkowo narażeni na kontakty z dziwakami. Przywykł zatem do otrzymywania rękopisów od obcych ludzi, dowodzących proroczej mądrości budowniczych piramidy Cheopsa, prawdziwości rewelacji Mędrców Syjonu lub kryptogramów, które Francis Bacon umieścił w sztukach „osobnika” zwanego Szekspirem.

Tak więc Hardy czuł się przede wszystkim znudzony. Patrzył na list sklecony łamaną angielszczyzną i podpisany przez nieznanego Hindusa, proszącego, by wydał sąd o jego odkryciach matematycznych. Rękopis wydawał się składać z twierdzeń w większości szalonych i fantastycznych, w jednym czy dwóch

przypadkach dobrze już znanych, przedstawionych tak, jakby były oryginalnym dziełem autora. Brakowało jakichkolwiek dowodów. Hardy był nie tylko znudzony, ale i poirytowany. Wyglądało mu to na szalbierstwo, ale niezwykle osobliwe. Odłożył rękopis i powrócił do zaplanowanych na ten dzień zajęć. Ponieważ tok zajęć Hardy'ego nie zmieniał się przez całe jego życie, możemy go zrekonstruować. Najpierw przy śniadaniu przeczytał "Timesa". Działo się to w styczniu i jeżeli w gazecie podano by wyniki australijskich rozgrywek krykietowych, rozpocząłby lekturę od bacznego ich przestudiowania.

Maynard Keynes, który zaczął karierę jako matematyk i który był znajomym Hardy'ego, zbeształ go kiedyś mówiąc, że gdyby w identycznym skupieniu każdego dnia przez pół godziny czytał notowania akcji na giełdzie, mógłby bez wątpienia zostać bogatym człowiekiem.

Następnie od około dziewiątej do pierwszej Hardy - o ile nie wygłaszał tego dnia wykładu - pracował nad własnymi teoriami. Zwykł mawiać, że cztery godziny twórczej pracy dziennie to dla matematyka granica możliwości. Lunch, lekki posiłek w reflektorium. Po lunchu biegł na partię tenisa na uniwersyteckich kortach. Późnym popołudniem spacer z powrotem do mieszkania. Jednakże tego dnia, choć w jego harmonogramie nie zaszły żadne zmiany, umysł Hardy'ego nie pracował zgodnie z planem. Tkwiące w jego zakamarkach wspomnienie rękopisu z Indii nie dawało mu spokoju, psując całą przyjemność, jaką czerpał z własnych rozważań. Szalone twierdzenia! Twierdzenia, jakich nigdy wcześniej ani nie widział, ani sobie nie wyobrażał! Genialny oszust? To pytanie zrodziło się w głowie Hardy'ego. Jego umysł sprowadził je do postaci zwięzłej i klarownej: czy pojawienie się genialnego oszusta jest bardziej prawdopodobne od pojawienia się genialnego matematyka? Odpowiedź najwyraźniej brzmiała: "nie". Powróciwszy do swego mieszkania w college'u, jeszcze raz obejrzał rękopis. Posłał wiadomość Littlewoodowi (przypuszczalnie przez gońca, a z pewnością nie przez telefon, który - podobnie jak wszystkie urządzenia mechaniczne, z wiecznymi piórami włącznie - traktował z głęboką nieufnością), że po kolacji muszą coś omówić.

Gdy posiłek dobiegł końca, mogła nastąpić drobna zwłoka. Hardy lubił wypić kieliszek wina, lecz mimo wspaniałych dzieł Alana St. Aubyna - pseudonim autorki brytyjskiej Frances L. Marshall (1839-1920), które rozpaliły jego młodzieńczą wyobraźnię, przekonał się już, że nie przepada za przesiadywaniem w pokoju klubowym przy winie i orzeszkach. Littlewood natomiast bardzo to lubił. Zatem mogła nastąpić zwłoka. Tak czy owak, mniej więcej o dziewiątej znaleźli się w jednym z pokoi Hardy'ego nad rozłożonym przed nimi rękopisem.

Oto zdarzenia, przy którym człowiek chciałby być obecny, by ujrzeć, jak podchodzą do rozwiązania tego problemu: Hardy, ze swą bezlitosną klarownością umysłu połączoną z intelektualną ostentacją i Littlewood, obdarzony wielką wyobraźnią, zdolnościami i poczuciem humoru. Dyskusja nie zajęła im dużo czasu. Przed wybiciem północy wiedzieli, wiedzieli na pewno: autor tego rękopisu

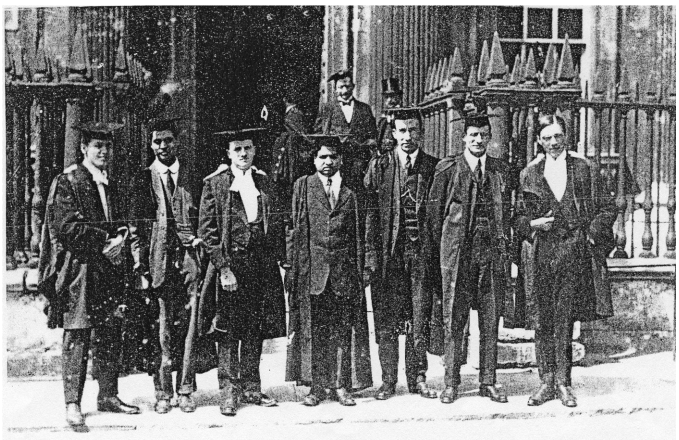
był geniuszem. Tyle zdołali stwierdzić tamtego wieczoru. Dopiero później Hardy doszedł do wniosku, że Ramanujan, w kategoriach wrodzonego geniuszu matematycznego, mieści się w klasie Carla Freidricha Gaussa i Leonarda Eulera; jednak ze względu na braki w wykształceniu i zbyt późne pojawienie się na scenie dziejów matematyki nie może oczekiwać, iż dorówna im wielkością wkładu w jej rozwój.

To wszystko wydaje się proste - wielcy matematycy powinni być zdolni do wydania tego rodzaju sądu. Wspomniano jednak o dwóch osobach, które nie jawią się w tej historii w pozytywnym świetle. Rycerski Hardy zataił ten fakt we wszystkim, co mówił i napisał o Ramanujanie. Ludzie, o których chodzi, nie żyją już jednak od wielu lat i pora powiedzieć prawdę. Hardy nie był pierwszym wybitnym matematykiem, który otrzymał rękopis Ramanujana. Przed nim czytali go dwaj uczeni, obaj będący Anglikami, obaj najwyższej miary. Każdy z nich odesłał rękopis bez komentarza.

W każdym razie następnego dnia Hardy przystąpił do działania. Zdecydował, że Ramanujana trzeba sprowadzić do Anglii. Pieniądze nie były dużym problemem. Trinity Collage zwykle potrafił wspierać nieszablonowe talenty (parę lat później jego władze uczyniły to samo dla Piotra Kapicy - znanego rosyjskiego fizyka, później w 1978 roku został laureatem nagrody Nobla). Z chwilą gdy Hardy zagiął na coś parol, żadna ludzka siła nie mogła go powstrzymać. Potrzebował jednak pomocy ze strony sił nadprzyrodzonych.

Okazało się, że Ramanujan to biedny kancelista z Madrasu, utrzymujący się wraz z żoną z dwudziestu funtów rocznego dochodu. Był jednak również braminem, niezwykle surowo przestrzegającym nakazów swej religii, i mieszkał z matką, która przestrzegała go jeszcze ściślej. Wydawało się niemożliwością, by zdołał złamać te zakazy i przepłynąć ocean. Na szczęście matka Ramanujana darzyła najwyższą czcią boginię Namakkal. Pewnego ranka oznajmiła synowi zaskakującą nowinę. Poprzedniej nocy miała sen, w którym ujrzała go siedzącego w wielkiej sali pośród grupy Europejczyków, a bogini Namakkal zabroniła jej przeszkadzać synowi w urzeczywistnianiu życiowego celu. Indyjscy biografowie Ramanujana twierdzą, że dla wszystkich zainteresowanych była to bardzo przyjemna niespodzianka.

W 1914 roku kancelista z Madrasu przybył do Anglii. Na ile Hardy zdołał to wykryć, Ramanujan - mimo trudności ze złamaniem kastowych zakazów - nie wierzył w teologiczną doktrynę bardziej niż on sam. Z pewnością jednak przestrzegał rytuałów. Gdy władze Trinity ulokowały go w college'u - po czterech latach został jego członkiem. Hardy zastawał go zwykle ubranego w przepisane rytuałem luźne szaty, smażącego z dość żałosną miną warzywa w swoim pokoju.



Ramanujan (po środku) i Hardy (po prawej) z innymi naukowcami przed Domem Senatu Uniwersytetu Cambridge w Anglii.

Ich współpraca miała osobliwie wzruszający charakter. Hardy nie zapomniał, że obcuje z geniuszem; geniuszem, który nawet w matematyce był prawie zupełnie nie wyszkolony. Ramanujan nie mógł wstąpić na Uniwersytet Madraski, ponieważ nie zdołał zdać egzaminu wstępnego z angielskiego. Zgodnie z relacją Hardy'ego był zawsze sympatyczny i dobroduszny, lecz Hardy niewątpliwie wprawiał go czasami w zakłopotanie rozmową na tematy nie związane z matematyką. Pewnie słuchał go z cierpliwym uśmiechem na swej zacnej, przyjaznej i pospolitej twarzy. Nawet w matematyce musieli godzić się z różnicą w swoim wykształceniu. Ramanujan był samoukiem: nie miał pojęcia o rygorach współczesnej nauki, niezbyt dobrze wiedział, na czym polega dowód. W nietypowej dla siebie chwili intelektualnej niedbałości Hardy napisał, że gdyby Hindus otrzymał lepsze wykształcenie, nie byłby taki ramanujański. Powróciwszy do ironicznej przytomności, Hardy poprawił się i przyznał, że to stwierdzenie było nonsensem. Gdyby Ramanujan miał lepsze wykształcenie, stałby się jeszcze wspanialszym matematykiem. W rzeczywistości Hardy musiał mu udzielić paru lekcji konwencjonalnej matematyki, tak jakby Ramanujan był kandydatem, ubiegającym się o stypendium w Winchester. Wspomniał później, że było to w jego życiu doświadczenie z niczym nieporównywalne: ujrzeć, jak współczesna matematyka wygląda dla kogoś, kto głęboko wnikał w jej tajniki, lecz nigdy nawet nie słyszał o większości jej twierdzeń.

W każdym razie wspólnie napisali pięć prac najwyższej próby, w których Hardy dowiódł swej olbrzymiej oryginalności. Przynajmniej raz wielkoduszność i wyobraźnia zostały w pełni nagrodzone.

Jest to historia wielkiej cnoty. Odtąd ludzie raz postąpili dobrze, zaczęli postępować jeszcze lepiej. Warto pamiętać, że Anglia oddała Ramanujanowi wszelkie możliwe honory. Royal Society wybrało go na swego członka, gdy miał

trzydzieści (co, nawet dla matematyka, jest wielkim zaszczytem w tak młodym wieku). W tym samym roku został także członkiem Trinity College. Był pierwszym Hindusem, który otrzymał te wyróżnienia. Odczuwał za nie wielką wdzięczność. Wkrótce jednak zachorował. W czasie wojny trudno było go przewieźć do kraju o łagodniejszym klimacie.

Hardy odwiedzał go na łożu śmierci w szpitalu w Putney. Właśnie podczas jednej z tych wizyt miał miejsce incydent z numerem taksówki. Hardy pojechał do Putney taksówką, jak zwykle preferując ten środek lokomocji. Wszedł na salę, w której leżał Ramanujan i, jak zawsze niezręczny w rozpoczynaniu rozmowy, przypuszczalnie bez powitania, a z pewnością zaraz po nim, rzekł:

- Moja taksówka miała numer 1729. Odniosłem wrażenie, że to raczej nieciekawa liczba.
Na to Ramanujan odparł:
- Ależ nie, Hardy! Wcale nie! To bardzo interesująca liczba. To najmniejsza liczba, którą można przedstawić na dwa różne sposoby jako sumę dwóch liczb podniesionych do sześcianu.

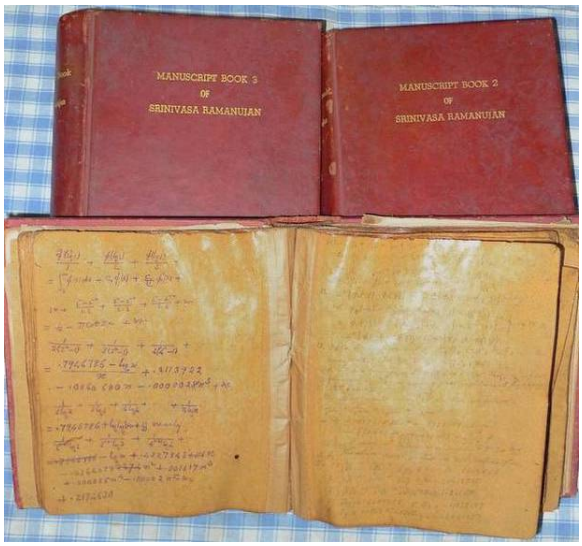
$$1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$$

Uogólnienie tego pomysłu doprowadziło do powstania idei liczb taksówkowych, tzn. nieskończonego ciągu najmniejszych liczb naturalnych, które można na n różnych sposobów zapisać jako sumę dwóch sześcianów. Największą obecnie znaną liczbą taksówkową jest Ta(12), tzn. najmniejsza liczba naturalna, którą można wyrazić jako sumę dwóch sześcianów na 12 różnych sposobów.

Tak zapamiętał tę wymianę zdań Hardy. Jego wspomnienia są zapewne dokładne. Hardy był przecież najuczciwszym z ludzi, a poza tym nikt w żaden sposób nie mógłby tego wymyślić. Ramanujan zmarł na gruźlicę w Madras, dwa lata po zakończeniu wojny. Jak twierdził Hardy w apelu poległych matematyków zamieszczonym w "Apologii matematyka" jego autorstwa:

Galois zmarł w wieku dwudziestu jeden lat, Abel - dwudziestu siedmiu, Ramanujan - trzydziestu trzech, a Riemann - czterdziestu. Nie znam przypadku znaczącego postępu w matematyce, zapoczątkowanego przez człowieka po pięćdziesiątce.

W 1976 r. w Trinity College znaleziono pudełko ze 130-stronicowym zbiorem kartek, zwanym potem *Zaginionym notatnikiem*. Jego spuścizna matematyczna to ok. 4000 wzorów. Niektórych z jego liczbowych zależności, będących najczęściej zaczątkiem nowych teorii, nikt dotąd nie udowodnił.



Sukcesję po Hardyn w temacie wzorów Ramanujana, zwłaszcza na bazie *Zaginionego notatnika*, przejął amerykański matematyk Bruce Berndt i jego współautorzy oraz studenci. Rezultatem ich działalności jest wiele prac w najpoważniejszych czasopismach matematycznych oraz pięć tomów *Ramanujan's Notebook* wydanych przez Springera. Utworzono też czasopismo *Ramanujan Journal*, należące do topowych w matematyce.