TWIERDZENIE EULERA
o odległości pomiędzy środkami okręgów opisanego i wpisanego w dany trójkąt

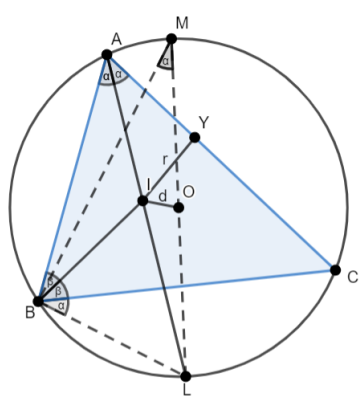
Adam Pękała
Monika Kusz
Paulina Anderson

10 listopada 2023

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że punkty O oraz I oznaczają środki odpowiednio okręgu opisanego na danym trójkącie i okręgu wpisanego w ten trójkąt o promieniach równych odpowiednio R i r. Ponadto, niech $d = |OI|$. Wówczas zachodzi wzór:*

$$d^2 = R^2 - 2rR.$$

Dowód. Rozważmy trójkąt ABC. Punkt przecięcia dwusiecznej kąta wewnętrznego przy wierzchołku A z okręgiem opisanym na tym trójkącie oznaczmy przez L, a przez punkt M punkt symetryczny do punktu L względem środka tego okręgu.



Ponadto, niech:

$$\alpha = \frac{1}{2}|\angle BAC|,$$

$$\beta = \frac{1}{2}|\angle ABC|.$$

Wówczas mamy też:

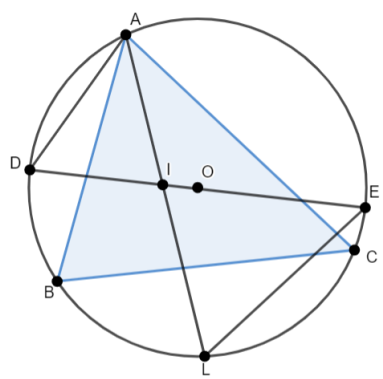
$$|\angle BML| = |\angle BAL| = \alpha,$$
$$|\angle LBC| = |\angle LAC| = \alpha.$$

Ponieważ kąt wewnętrzny przy wierzchołku I w trójkącie ABI spełnia zależność:

$$|\angle BIL| = \alpha + \beta = |\angle LBI|,$$

więc trójkąt LBI jest równoramienny.

Udowodnimy teraz, że $|LI| \cdot |IA| = R^2 - d^2$.



Dowód. Niech DE będzie średnicą rozważanego okręgu opisanego na trójkącie ABC poprowadzoną przez punkty O oraz I. Ponieważ trójkąty ADI i LEI są podobne [według cechy: kąt-kąt-kąt], więc

$$\frac{|DI|}{|LI|} = \frac{|IA|}{|IE|}.$$

Stąd otrzymujemy:

$$|LI| \cdot |IA| = |DI| \cdot |IE| = (R-d)(R+d) = R^2 - d^2,$$

czyli [ponieważ trójkąty LBM i AIY są prostokątne]:

$$R^2 - d^2 = |LI| \cdot |IA| = |LB| \cdot |IA| = |LM| \cdot \frac{\frac{|LB|}{|LM|}}{\frac{|IY|}{|IA|}} \cdot |IY| = |LM| \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} \cdot |IY| = |LM| \cdot |IY| = 2Rr.$$

Podsumowując znaleziono wzór:

$$R^2 - d^2 = 2Rr,$$

skąd:

$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

$\square$