A. Pluta, W. Dziedzic
Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska

Bardzo małe przedziały zawierające co najmniej 3 liczby pierwsze

opracowano na podstawie artykułu pod tym samym tytułem – napisanego przez Vladimira Shevelev'a – matematyka z Izraela
(zob. arXiv:0910.0428v2 [math, NT] 4 Oct. 2009)

29 stycznia 2022

1. Kilka informacji wstępnych o liczbach pierwszych

Niech p_n oznacza n–tą liczbę pierwszą dla każdego $n \in \mathbb{N}$, zaś $\mathbb{P}$ będzie klasą wszystkich rosnących nieskończonych ciągów liczb pierwszych. Jeśli $A \in \mathbb{P}$, to oznaczmy przez $\mathcal{A}$ zdarzenie, takie że liczba pierwsza $p \in A$. Zwróćmy także uwagę na pewne ciągi występujące w $\mathbb{P}$, które odgrywają ważną rolę w omawianej konstrukcji. Niech A_i będzie ciągiem składającym się z liczb pierwszych q_k, takim że każdy przedział $(2q_k, 2q_{k+1})$, $k \in \mathbb{N}$, zawiera co najmniej i liczb pierwszych, gdzie $i = 1, 2, 3$. Zdarzenie, takie że $p_n \in A_i$ (dla $i = 1, 2, 3$) będziemy oznaczać przez $\mathcal{A}_i(n)$.

Rozważmy teraz następujący problem. Niech p będzie nieparzystą liczbą pierwszą i ponadto niech $p_n < \frac{p}{2} < p_{n+1}$. Z postulatu Bertranda wiemy, że pomiędzy $\frac{p}{2}$ i p istnieje liczba pierwsza oraz że liczba pierwsza istnieje także pomiędzy p i $2p$. Zatem $p_{n+1} \leqslant p$.

Jednak bardziej wnikliwym problemem jest znalezienie lub przynajmniej oszacowanie prawdopodobieństwa $P(S)$ z jakim w przedziale $(p; 2p_{n+1})$ odpowiednio $(2p_n; p)$ znajduje się liczba pierwsza. Takie liczby pierwsze p nazywamy odpowiednio liczbami **R**–pierwszymi lub **L**– pierwszymi.

Przytoczymy teraz ważne twierdzenie na temat małych przedziałów zawierających co najmniej 3 liczby pierwsze:

Twierdzenie 1. *Zbiór przedziałów postaci* $(2p_n; 2p_{n+1})$ *zawierający co najmniej* 3 *liczby pierwsze ma dodatnią gęstość w stosunku do zbioru wszystkich przedziałów takiej postaci.*

2. Liczby R–pierwsze, L–pierwsze, RL–pierwsze

Przedstawimy teraz twierdzenie (wraz z dowodem) przedstawiające kryteria dla liczb **R**–pierwszych, **L**–pierwszych oraz **RL**–pierwszych, tj. liczb pierwszych będących równocześnie liczbami **R**–pierwszymi oraz **L**–pierwszymi.

Twierdzenie 2. *1) p_n jest liczbą* **R**–*pierwszą, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\pi(\frac{p_n}{2}) = \pi(\frac{p_{n+1}}{2})$.
2) p_n jest liczbą **L**–*pierwszą, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\pi(\frac{p_n}{2}) = \pi(\frac{p_{n-1}}{2})$.
3) p_n jest liczbą **RL**–*pierwszą, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\pi(\frac{p_{n-1}}{2}) = \pi(\frac{p_{n+1}}{2})$.

Dowód. 1) Niech będzie spełnione $\pi(\frac{p_n}{2}) = \pi(\frac{p_{n+1}}{2})$. Jeśli $p_k < \frac{p_n}{2} < p_{k+1}$, to z faktu, że pomiędzy $\frac{p_n}{2}$ i $\frac{p_{n+1}}{2}$ nie istnieją liczby pierwsze, wynika że $\frac{p_{n+1}}{2} < p_{k+1}$. Dlatego $2p_k < p_n < p_{n+1} < 2p_{k+1}$, tj. p_n jest liczbą **R**–pierwszą. Odwrotnie, jeśli p_n jest liczbą **R**–pierwszą, to wtedy $2p_k < p_n < p_{n+1} < 2p_{k+1}$ i $\pi(\frac{p_n}{2}) = \pi(\frac{p_{n+1}}{2})$.
2) Niech będzie spełnione $\pi(\frac{p_n}{2}) = \pi(\frac{p_{n-1}}{2})$. Jeśli $p_k < \frac{p_n}{2} < p_{k+1}$, to z faktu, że pomiędzy $\frac{p_{n-1}}{2}$ i $\frac{p_n}{2}$ nie istnieją liczby pierwsze wynika, że $\frac{p_{n-1}}{2} > p_{k-1}$. Dlatego $2p_{k-1} < p_{n-1} < p_n < 2p_{k+1}$, tj. p_n jest liczbą **L**–pierwszą. Odwrotnie, jeśli p_n jest liczbą **L**–pierwszą, to wtedy $2p_{k-1} < p_{n-1} < p_n < 2p_{k+1}$ i $\pi(\frac{p_{n-1}}{2}) = \pi(\frac{p_n}{2})$.
3) Dowód tego faktu wynika z 1) oraz 2). □

3. Dowód hipotezy „precyzyjnej symetrii”

Przedstawmy najpierw dowód dotyczący ciekawej hipotezy sformułowanej w pracy [1].

Hipoteza 1. *Niech* $\mathbf{R}_n$ *(odpowiednio* $\mathbf{L}_n$*) oznacza n–ty wyraz ciągu kolejnych liczb* **R**–*pierwszych (odpowiednio* **L**–*pierwszych). Wtedy:*

$$\mathbf{R}_1 \leqslant \mathbf{L}_1 \leqslant \mathbf{R}_2 \leqslant \mathbf{L}_2 \leqslant \ldots \leqslant \mathbf{R}_n \leqslant \mathbf{L}_n \leqslant \ldots$$

Dowód. Oczywiste jest, że rozważane przedziały, które zawierają nie więcej niż jedną liczbę pierwszą, nie zawierają żadnych liczb **R**–pierwszych lub **L**– pierwszych. Rozważmy pozostałe przedziały zaczynając od pierwszego, w którym pierwszą liczbą pierwszą jest liczba **R**–pierwsza ($\mathbf{R}_1$). Jeżeli przedział ten ma tylko 2 liczby pierwsze, to oczywiście liczba **L**–pierwsza ($\mathbf{L}_1$) jest drugą liczbą pierwszą w tym przedziale. Dodatkowo zauważmy, że $\mathbf{R}_1 < \mathbf{L}_1$. Z drugiej strony, zauważmy, że jeżeli w takim przedziale mamy k liczb pierwszych, to zaczynając od drugiej kolejnej aż do $(k-1)$–szej mamy wyłącznie liczby **RL**–pierwsze, czyli liczby będące jednocześnie liczbami **R**–pierwszymi i **L**–pierwszymi. A więc, biorąc pod uwagę, że ostatnią liczbą pierwszą jest liczba **L**–pierwsza, mamy:

$$\mathbf{R}_1 < \mathbf{L}_1 = \mathbf{R}_2 = \mathbf{L}_2 = \mathbf{R}_3 = \ldots = \mathbf{L}_{k-1} = \mathbf{R}_{k-1} < \mathbf{L}_k.$$

W drugim w kolejności takim przedziale pierwsza będzie liczba **R**–pierwsza, a dalsze rozumowanie wygląda jak w przypadku pierwszego przedziału. □

Wniosek 1. *Liczba wszystkich liczb* **RL**-*pierwszych nieprzekraczająca* x *jest nie mniejsza niż liczba wszystkich liczb* A_3-*pierwszych nie większych od* x*, lub taka sama, czyli:*

$$P(\mathbf{RL}) \geqslant P(\mathcal{A}_3).$$

Wniosek 2. *Zachodzi nierówność:*

$$P(\mathbf{RL}) \geqslant P^3(\mathcal{A}_1).$$

Dowód. Istotnie, ponieważ wiadomo, że $P_{\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_3) = P^2(\mathcal{A}_1)$ - zob. [1], więc mnożąc tę równość przez $P(\mathcal{A}_1)$ dostajemy

$$P(\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3) = P^3(\mathcal{A}_1)$$

skąd wynika, że $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_3$. Teraz wniosek ten wynika z wniosku 1. □

4. Obliczanie $P(\mathbf{RL})$ i klasyfikacja liczb pierwszych

Zachodzi następująca zależność (zob. [1]):

$$P(\mathbf{R}+\mathbf{L}) = P_{\mathcal{A}_1}(\mathcal{A}_2) = P(\mathcal{A}_1).$$

Dlatego, korzystając z zależności:

$$P(\mathbf{R}) = P^2(\mathcal{A}_1) = \frac{9-\sqrt{17}}{8} = 0.60961179\ldots$$

znajdujemy:

$$P(\mathbf{RL}) = 2P(\mathbf{R}) - P(\mathbf{R}+\mathbf{L}) = 0.43844717\ldots.$$

W związku z powyższym, otrzymujemy

$$P(\mathbf{R}\overline{\mathbf{L}}) := P(\mathbf{R}) - P(\mathbf{RL}) = 0.60961179\ldots - 0.43844717\ldots = 0.17116461\ldots$$

Poprzez symetrię mamy również

$$P(\mathbf{L}\overline{\mathbf{R}}) = 0.17116461\ldots.$$

Naturalne jest rozważenie następującej klasyfikacji liczb pierwszych: $\mathbf{R}\overline{\mathbf{L}}$– pierwsze można nazwać „prawymi liczbami pierwszymi”, $\mathbf{L}\overline{\mathbf{R}}$–pierwsze - „lewymi liczbami pierwszymi”, podczas gdy liczby **RL**–pierwsze naturalnie jest nazywać "centralnymi liczbami pierwszymi". Na koniec, resztę liczb pierwszych naturalne jest, aby nazywać "izolowanymi liczbami pierwszymi". Mamy więc następujące proporcje pomiędzy nimi: 0.17116461 ..., 0.17116461 ..., 0.43844717 ... oraz 0.21922361 ... odpowiednio.

Niech $m > 1$. W przypadku przedziałów (mp_n, mp_{n+1}) odpowiednie proporcje m– „prawych liczb pierwszych”, m–"lewych liczb pierwszych", m–

"centralnych liczb pierwszych" i m–"izolowanych liczb pierwszych" wynoszą odpowiednio:

$$\sqrt{\frac{2m^2+1-\sqrt{4m^2+1}}{2m^2}}-\frac{2m^2+1-\sqrt{4m^2+1}}{2m^2},$$
$$\sqrt{\frac{2m^2+1-\sqrt{4m^2+1}}{2m^2}}-\frac{2m^2+1-\sqrt{4m^2+1}}{2m^2},$$
$$\frac{2m^2+1-\sqrt{4m^2+1}}{m^2}-\sqrt{\frac{2m^2+1-\sqrt{4m^2+1}}{2m^2}},$$

oraz

$$1-\sqrt{\frac{2m^2+1-\sqrt{4m^2+1}}{2m^2}}.$$

5. Dowód twierdzenia 1

Powinniśmy udowodnić, że $P(\mathcal{A}_3) > 0$. Załóżmy przeciwnie, że $P(\mathcal{A}_3) = 0$. Wtedy również $P(\mathcal{A}_1) = 0$. Dlatego też (por. dowód hipotezy 1) mamy $P(\mathbf{RL}) = 0$. Sprzeczność z poprzednią sekcją pokazuje, że $P(\mathcal{A}_3) > 0$. $\square$

Zauważmy, że według przypuszczenia Cram'era z 1937 roku $2p_{n+1} - 2p_n < (2+\varepsilon)\ln^2 n$. Tak więc istnieje nieskończony ciąg przedziałów o takiej małej długości, ale mających co najmniej trzy liczby pierwsze, a ponadto ciąg ten ma dodatnią gęstość w stosunku do ciągu wszystkich przedziałów postaci $(2p_n, 2p_{n+1})$.

Uwaga 1. *Z dowodu twierdzenia 1 można wywnioskować, że dla dowolnie dużych, ale stałych m, zbiór przedziałów postaci $(2p_n, 2p_{n+1})$, zawierający co najmniej m liczb pierwszych, ma dodatnią gęstość w stosunku do zbioru wszystkich przedziałów takiej postaci.*

Analogicznie można rozważyć m–uogólnienie twierdzenia 1 na każde $1 < m < 2$. Tutaj szczególnie interesujący jest przypadek wartości m bliskich 1.

Literatura

[1] V. Shevelev, Three probabilities concerning prime gaps, `http://arxiv.org/abs/0909.0715`.