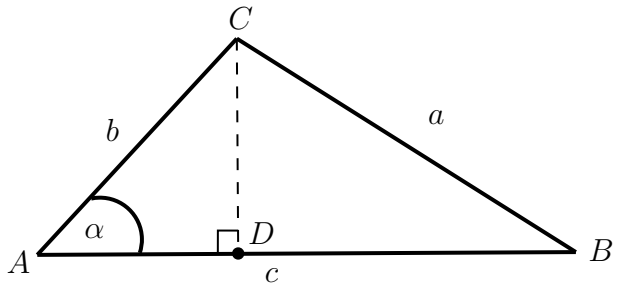
Rozwiązania wybranych zadań konkursowych
Zadanie 5, kategoria UCZNIOWIE:

(a) Omów związek twierdzenia cosinusów z twierdzeniem Pitagorasa.

(b) Przedstaw chociaż jedną (i to w planimetrii) uogólnioną wersję twierdzenia Pitagorasa.

Opracowali:
Michał Różański, Adrian Smuda, Roman Wituła
na podstawie przesłanych rozwiązań:
Marzeny Halamy, Marcina Kowalskiego
i Wiktora Tomiczka (ucznia ALO Rybnik)

Rozwiązania.
(a) Pokażemy jak z twierdzenia Pitagorasa wynika twierdzenie cosinusów.
Do trójkątów ADC i DBC na rysunku poniżej:



$$h = |CD|,$$
$$x = |AD|,$$
$$c - x = |DB|,$$

stosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$$\begin{cases} b^2 = x^2 + h^2, \\ a^2 = (c-x)^2 + h^2, \end{cases}$$

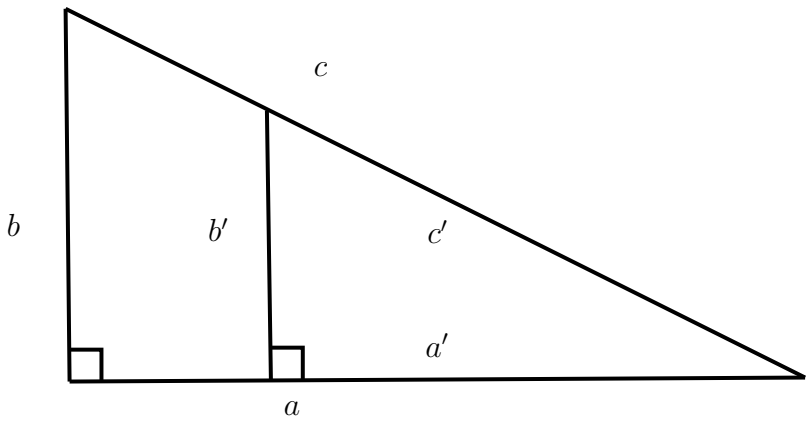
skąd po odjęciu tych równań stronami otrzymujemy:

$$b^2 - a^2 = 2cx - c^2,$$
$$b^2 + c^2 - 2cx = a^2,$$

co po uwzględnieniu zależności $x = b\cos\alpha$ daje oczekiwany wzór:

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha = a^2.$$

Oczywiście zakładając, że α jest kątem prostym z powyższego wzoru dostajemy twierdzenie Pitagorasa.
(b) Przedstawimy wersje: uogólnione planimetryczne, równoważne planimetryczne, uogólnione stereometryczne.
Pierwsza wersja uogólnienia. Kwadrat długości przekątnej prostopadłościanu n-wymiarowego jest równy sumie kwadratów długości boków tego prostopadłościanu.
Druga wersja (Enzo R. Gentile, zob. [1]). Wersja Talesa twierdzenia Pitagorasa:



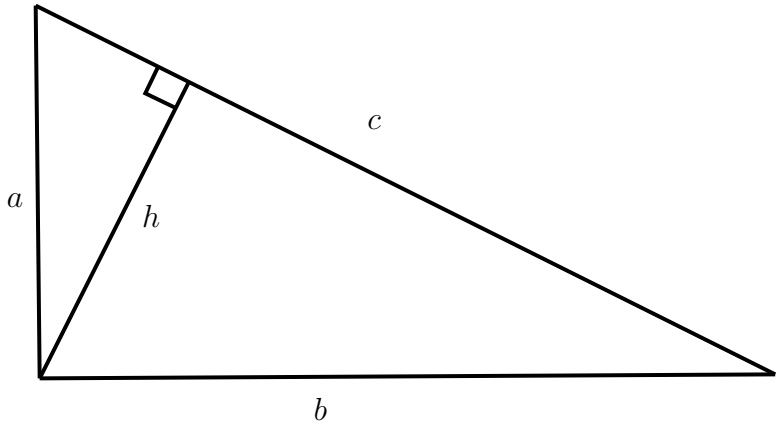
Z twierdzenia Talesa wynika, że:

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a}{a'}.$$

Skąd na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta „primowanego” dostajemy nową wersję twierdzenia Pitagorasa w stylu Talesa:

$$\begin{aligned} cc' &= \frac{a}{a'}(c')^2 = \frac{a}{a'}[(a')^2 + (b')^2] = \\ &= aa' + \frac{a}{a'}b'b' = aa' + bb'. \end{aligned}$$

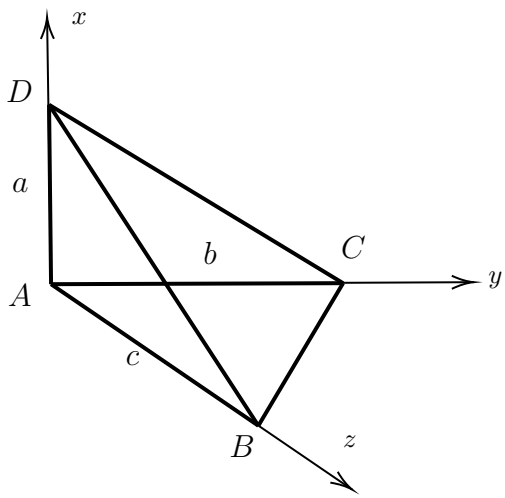
Trzecia wersja (zob. [2]). Wersja ta dotyczy sumy odwrotności kwadratów długości boków. Dany jest trójkąt prostokątny:



Z twierdzenia Talesa wynika, że $h = \frac{ab}{c}$, skąd po zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Czwarta wersja. Twierdzenie Pitagorasa dla czworościanu odciętego od prostopadłościanu o bokach a, b, c.
Rozważmy więc anonsowany czworościan:



Pokażemy, że suma kwadratów pól trójkątów z wierzchołkiem A tj. trójkątów ABC, ABD i ACD równa się kwadratowi pola czwartego trójkąta BCD. Równanie płaszczyzny zawierającej trójkąt BCD ma postać:

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Odległość punktu $A(0,0,0)$ od płaszczyzny π dana jest wzorem:

$$h = \frac{\left|1 - \frac{0}{a} - \frac{0}{b} - \frac{0}{c}\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$

Stąd, wobec wzoru na objętość V czworościanu $ABCD$ otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{3}|\Delta BCD| \cdot h = \frac{1}{6}abc,$$

tj.

$$\begin{aligned} |\Delta BCD|^2 &= \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 = \\ &= |\Delta ACD|^2 + |\Delta ABD|^2 + |\Delta ABC|^2, \end{aligned}$$

co jest zapowiedzianym wzorem – wersją twierdzenia Pitagorasa dla czworościanu odciętego od prostopadłościanu.

Literatura

[1] Nelsen R., *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking, Vol. 1*, Mathematical Association of America, 1993.

[2] Nelsen R., *Proofs Without Words III, Further Exercises in Visual Thinking*, Mathematical Association of America, 2016.