

Wspomnienia i refleksje o matematykach związanych z Wydziałem Matematyczno-Fizycznym w latach 1981–2000

spisane przez Romana Witulę

redakcja tekstu: Barbara Smoleń, Michał Różański, Roman Witula

Nature and Nature's laws lay hid in night.
God said, Let Newton be! and all was light.
Alexander Pope (1688-1744)¹

Rozpocząłem studia na specjalności matematyka stosowana na Wydziale Matematyczno-Fizycznym w pamiętnym dla współczesnej historii Polski roku 1981. W gronie wykładowców znaleźli się m.in. profesorowie Zygmunt Zahorski (wstęp do logiki i teorii mnogości), jego żona Janina Śladkowska-Zahorska (analiza matematyczna) oraz mgr Krzysztof Herman — ćwiczeniowiec z algebry. Zawdzięczam im inicjację matematyczną. Pokazali nam studentom nowy, niezwykle świat, którego doświadczyć mogą jedynie studenci matematyki. Parafrazując słowa z motta: *Istotę matematyki i jej rozumienie spowijał przed naszymi studiami mrok nieświadomości. Zapewne to Bóg podarował nam — studentom Królowej Nauk — tych wspaniałych profesorów i wykładowców, by nasza wiedza rozbłysła*. Wybór matematycznej profesji, postrzeganej powszechnie jako oryginalna, pozwala poznać istotność aksjomatyki jako podstawy nauki, pozwala doświadczyć subtelności wielu pojęć, jak własność Darboux funkcji, całkowalność w sensie Riemanna i w sensie Kurzweila-Henstocka i wreszcie zobaczyć cel działań badawczych, wyróżnianie abstrakcyjnych struktur, znajdowanie związków pomiędzy nimi i fundamentalnych własności. Profesor Zahorski na swoich zajęciach często podkreślał ważność zastosowań matematyki na wielu poziomach rozległego obszaru techniki, ekonomii i medycyny². Był wielkim orędownikiem informatyki, chociaż gdy kończyłem studia w 1986 roku na Wydziale, zaledwie kilka osób było właścicielami komputera — ZX Spectrum, a wykładanymi językami programowania były Basic i Turbo Pascal³. Korzystając z okazji, chciałbym bardzo podziękować kolegom: magistrum Benkowi Morawcowi i Piotrowi Drągowi, za udostępnianie prywatnego sprzętu komputerowego w celach edukacyjnych innym kolegom — studentom (również mojej skromnej osobie).

¹ Znany rosyjski chemik, fizyk i poeta Michaił Wasiljewicz Łomonosow również parafrazował słowa Pope'a: Россия тьмой была покрыта много лет. Бог рек: да будет Петр. И был в России свет.

² Profesorowi Zahorskiemu poświęcono jeszcze dodatek C.

³ Zajęcia praktyczne z informatyki na komputerach Wang (w budynku Politechniki przy ul. Towarowej) prowadził z nami ówczesny „łamacz” serc studentek na Wydziale, wielki przyjaciel młodzieży doc. dr hab. Bohdan Mochnacki. Był kompetentnym prowadzącym, doradzał, bardzo wspierał kreatywne postawy, przykładowo potrafił zaakceptować zamienne propozycje (dotyczące oprogramowania) zaliczające przedmiot.

Podczas strajków studenci naszego Wydziału byli czynnie i biernie zaangażowani; część okupowała ówczesny budynek Wydziału przy ulicy Zwycięstwa. Moralnie wspomagało nas wielu pracowników, podkreślę tu przede wszystkim udział pani profesor Janiny Śladkowskiej-Zahorskiej, doktorów Jerzego Błahuta i Bolesława Wantuły oraz młodych pracowników Wydziału magistrów Jana Pochciała oraz Marka Balcera.

Studenci starszych roczników wspominali podczas wielogodzinnych debat strajkowych, jak zdarzyło im się z powodów losowych zdawać egzamin w domu państwa Zahorskich. Za traumatyczne uważali chwile, gdy po przystąpieniu do rozwiązywania zadań syn państwa Zahorskich — wówczas mały Jaś, po przeczytaniu ich treści biegał wokół stołu, obwieszcza-
jąc: *jakie to proste, jakie to proste...*!

Po fali egzaminów drugi semestr studiów z wyjściowej puli 40 studentów matematyki kontynuowało już tylko 30 studentów — liczba ta zmalała jeszcze odrobinę (o nieomal 10 osób) do końca studiów.

Na drugim i kolejnych trzech semestrach wykłady, a później też ćwiczenia z algebry prowadził z nami profesor Ernest Płonka, człowiek niezwykle porządny, skromny, otwarty na różnorodne pomysły. Był życzliwy i chętnie dzielił się swoją wiedzą. Przybył do nas z Uniwersytetu Wrocławskiego, gdzie związany był naukowo z seminarium profesora Andrzeja Hulanickiego — jednego z najwybitniejszych polskich matematyków. Profesor Płonka był moim opiekunem naukowym podczas ITS-u (indywidualnego toku studiów) oraz promotorem mojej pracy magisterskiej dotyczącej wybranych zagadnień szeregów liczbowych, iloczynów nieskończonych i ciągów (ponad 200 stron)⁴. Pracę tę wyróżniono na konkursie prac magisterskich im. Józefa Marcinkiewicza (organizowanym w oddziale toruńskim PTM-u).

Na pewnych ćwiczeniach z algebry profesor Płonka poprosił mnie o rozwiązanie zadania, w którym chodziło o znalezienie pierwiastków zespolonych danego wielomianu nad $\mathbf{R}$. Sęk w tym, że po odgadnięciu jednego z nich miałem na życzenie profesora wykonać dzielenie rozważanego wielomianu przez odpowiedni dwumian, ale wg schematu Hornera. Odpowiedziałem, że nie znam tego schematu (nie doczytałem), natomiast spokojnie jestem w stanie wykonać to dzielenie wg swojego pomysłu. Zaprezentowałem Profesorowi następujący sposób wykonania dzielenia, oparty na prostej graficznej ilustracji:

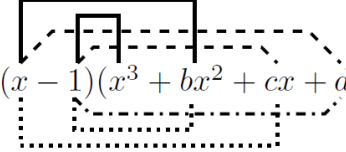
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Division of } (x+a)(x^2+bx+c) \text{ by } (x+a) \\ \hline (x+a)(x^2+bx+c) = x^3 + (a+b)x^2 + (ab+c)x + ac, \end{array} \\
 \begin{array}{c} \text{Diagram 2: Division of } (x+a)(x^3+bx^2+cx+d) \text{ by } (x+a) \\ \hline (x+a)(x^3+bx^2+cx+d) = x^4 + (a+b)x^3 + (ab+c)x^2 + (ac+d)x + ad. \end{array}
 \end{array}$$

⁴ Kilka słów na temat tej pracy postanowiłem zamieścić jeszcze w dodatku B.

Przykład. Wykonaj dzielenie:

$$(x - 1) \mid (x^4 + x^3 - 3x + 1).$$

Rozwiązanie. Szukam współczynników $b, c, d \in \mathbb{R}$, takich że:



$$(x - 1)(x^3 + bx^2 + cx + d) = x^4 + x^3 - 3x + 1.$$

Stąd:

$$b - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 2,$$

$$c - b = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 2,$$

$$-d = 1 \quad \Rightarrow \quad d = -1.$$

Profesor „rzucił” na to okiem i skomentował: *przecież to jest schemat Hornera!* I za ten graficzny schemat Hornera dał mi piątkę. Równocześnie za nieznamość schematu Hornera wstawił mi dwójkę. Doświadczyłem więc za sprawę tej sytuacji „niemożliwego”: w życiu zdarza się, że *prawo wyłączonego środka przestaje być tautologią!* Czyż nie warto jest to wspomnienia?

Podkreślę, że nieodłącznym atrybutem profesora Płonki była ściągaczka (taka do szyb), której profesor używał do czyszczenia tablicy – cierpiało przy tym odrobinę epsilonowe otoczenie tablicy, niechcący wybielone.

Wykłady z topologii i analizy funkcjonalnej na drugim roku moich studiów prowadził dr Jerzy Błahut. Zajęcia te polegały przede wszystkim na zapisywaniu tablicy treścią w ilościach dużych, a nawet bardzo dużych. Graficzny popis uzupełniony był tekstem mówionym bardzo na temat i niezwykle kompetentnie. Jednak swoim ciężarem jakościowym zajęcia te powodowały „wyłączanie się” kolegów z krwioobiegu wykładu. Doktor Błahut zapobiegał zjawisku zaśnięcia na wykładzie częstą zmianą tembru głosu, co studenci mieli mu za złe. Byłem jednym z nielicznych fanów tych zajęć, czego powodem był przede wszystkim znaczny stopień zaawansowania wykładów z mocnym akcentowaniem niuansów przykładowo z obszaru aksjomatyki teoriomnogościowej. Dzięki tym wykładom można było dostrzec w wielu podstawowych twierdzeniach topologii moc i znaczenie pewnika wyboru, sens wyróżnienia przeliczalnej wersji tego aksjomatu. Podkreślę, że topologię wyróżniliśmy dodatkowo przy użyciu pojęcia filtru podzbiorów danego zbioru — było to bardzo prorocze, gdyż po latach w swoich badaniach powróciłem do tej tematyki w kontekście dualnego do pojęcia filtru określenia ideału podzbiorów danego zbioru.

Na drugim oraz trzecim roku wykłady z geometrii różniczkowej prowadził dla nas wielki w tej materii autorytet profesor Mieczysław Kucharszewski. Były to spokojne, rzeczowe zajęcia. Pamiętam odkrycie przez moich kolegów tego, że z kieszeni marynarki profesora

przez okrągłutki rok zajęć wystawał fragment tego samego egzemplarza „pewnej” gazety, przez co nazwany został niezmiennikiem grupy przekształceń czasoprzestrzennych.

Na czwartym roku studiów trafiła nam się na wykładach kolejna niezwykle osobowość. Otóż mechanikę teoretyczną wyłożył nam sam profesor Bogdan Skalmierski. Sadzę, że było to bardzo ważne doświadczenie, pełne dygresji i uwag o niezwykle twórczej pracy naukowej. Wystłuchaliśmy m.in. wykładu z teorii skrzypiec oraz o skonstruowanych wg projektu profesora skrzypcach, tzw. skalmierusach (w sumie wyprodukowano ich kilka sztuk). Profesor zaprosił też wszystkich studentów na swój koncert skrzypcowy w Klubie Pracowników Politechniki Śląskiej przy ulicy Banacha 3, który zagrał specjalnie dla nas. Pomijając niespodziewane brawa jednej z koleżanek podczas pauzy muzycznej, koncert przebiegł spokojnie. Profesor Skalmierski przeniósł się później na Politechnikę Częstochowską (ściślej w 1986 roku), gdzie pracował do momentu przejścia na emeryturę.

Na czwartym i piątym roku byłem przewodniczącym Koła Naukowego Matematyków, któremu nadano wówczas nazwę Atraktor⁵. Oprócz rutynowych spotkań Koło zorganizowało też wyjazd naukowy do Ustronia. Opiekunowie naukowemu kołu, panowie mgr Krzysztof Herman, dr Piotr Gawron, a przede wszystkim specjalnie zaproszona na wyjazd pani dr Olga Macedońska-Nosalska (wówczas na rok przed swoją habilitacją), swoimi wystąpieniami aktywnie wsparli nasz pobyt i uczynili go niezwykle atrakcyjnym.

Dużo emocji dostarczyło uczestnikom zadanie pani dr Macedońskiej o czekoladzie: *udowodnić, że połamanie czekolady na pojedyncze kostki nie zależy od sposobu łamania i zawsze kończy się tą samą liczbą łamań*. Odkryliśmy empirycznie, że liczba łamań powinna być równa $mn - 1$, gdzie m i n oznaczają liczby rzędów (wierszy) i kolumn kostek danej czekolady. Zwieńczeniem rozwiązania był dowód indukcyjny tego wzoru ze względu na zmienną $S := m + n$. W nagrodę otrzymaliśmy od pani Macedońskiej czekoladę, która naprawdę była pyszna.



Koło Naukowe Matematyków patronowało wówczas corocznemu konkursowi studenckich prac naukowych (odbywał się pod koniec maja) zarówno z obszaru matematyki, jak i mechaniki oraz fizyki (wszystkich reprezentowanych na Wydziale specjalności). Wieloosobowe jury złożone z grona profesorów i wybranych pracowników Wydziału Matematyczno-Fizycznego nagradzało trzy spośród wygłoszonych referatów. Jest mi niezwykle miło przypomnieć, że w latach 1984 i 1985 razem z obecnym dziekanem Wydziału panem profesorem Waldemarem Hołubowskim zajmowaliśmy dwa pierwsze miejsca. Profesor Hołubowski studiował rok wyżej ode mnie, a dwa lata wyżej doktor Jacek Uryga⁶ — człowiek oddany całym sercem olimpiadom matematycznym (najpierw jako laureat, a potem jako organizator i juror, aktualnie także jako mentor adeptów matematyki).

⁵ Przez niewtajemniczonych w arkana matematyki zwane „Atrakcyjnym traktorem”, a gdy po dwóch latach aktywnej działalności obumarło, podsumowane zostało hasłem „Atraktor się zepsuł”.

⁶ Jacek Uryga tuż po skończeniu studiów rozpoczął prace w IMPAN w Katowicach. Pracownikiem naszego Wydziału został dopiero w 2005 roku.

W tym opracowaniu kilka linijek chciałbym poświęcić Krzysztofowi Hermanowi. W mojej pamięci zachował się portret Krzysztofa jako człowieka żarliwego, w pełni oddanego swojej matematycznej pasji — specjalizował się w algebrze. Już w trakcie strajku w grudniu 1981 roku „męczyłem” go pewnym problemem z teorii grup, który stanowił uogólnienie jakiegoś znanego faktu. Wspólnie odkryliśmy dwa niejasne miejsca w zaproponowanym przeze mnie dowodzie tego uogólnienia. Jedno z nich udało mi się wyjaśnić, a właściwie udowodnić pozytywnie, co niezwykle zaskoczyło Krzysztofa. Niestety drugie niejasne miejsce wyjaśniłem negatywnie po kilku latach, gdy Krzysztofa już nie było wśród nas. Więcej też do tego problemu nie wróciłem.

Z dwóch ostatnich ćwiczeń z algebry w I semestrze byłem przez Krzysztofa „wyrzucany”. Przez łagodną perswazję tłumaczył mi, że są też inni studenci i musi nawiązać z nimi kontakt. Podczas moich studiów często rozmawiałem z Krzysztofem, zwłaszcza w trakcie losowych spotkań, niekoniecznie krótkich.

Ostatni raz spotkałem Krzysztofa w czytelni matematycznej na Uniwersytecie Śląskim w lipcu lub sierpniu 1987 roku⁷. Spotkanie nastąpiło na krótko przed mającą się odbyć na Uniwersytecie Moskiewskim obroną jego doktoratu⁸. Wspominał, jak podczas swojego pobytu w Moskwie odwiedził bibliotekę uniwersytecką i przeglądał zgromadzone zbiory książkowe — wiele rarytasów — niestety jedynie przez szyby, gdyż były w szafach zamkniętych na kłódki. Nie spodobało się to jednej z pań bibliotekarek, która zapytała go, czego tu szuka. Gdy odpowiedział, że tylko ogląda zbiory, został przez nią zgromiony i wypchnięty siłą na zewnątrz biblioteki. Taki tam panował zwyczaj: nie oglądaj waść, no i nie pytaj. Podczas tego spotkania rozmawialiśmy nie tylko o matematyce, lecz także o obawach związanych z obroną, ale też o trapiącym go zapaleniu trzustki. Miał temperaturę, źle się czuł. Rak trzustki sprawił, że do obrony doktoratu Krzysztofa nie doszło. Zmarł po kilku tygodniach od naszego spotkania, o czym jednak dowiedziałem się dopiero po kilku miesiącach.

Tuż po studiach, w 1986 roku rozpocząłem pracę w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyczno-Fizycznym. Wiązało się to z otrzymaniem namaszczenia od „rodzimej” komórki partyjnej; w trakcie krótkiego spotkania należało udzielić odpowiedzi na pytania o cel podejmowanej pracy i dalsze plany naukowe. Po „politycznej” aprobacie przydzielono mi zajęcia dydaktyczne na Wydziale Elektrycznym i nieco później na rodzimym Wydziale ze studentami matematyki. Zespołowi dydaktycznemu na Wydziale Elektrycznym szefowała wówczas pani docent dr Stanisława Bogucka-Kamińska, zaangażowana na 100% w nauczanie, bardzo lubiana zarówno przez studentów, jak i kolegów po fachu.

Chciałbym podkreślić, że zajęcia z matematyki na kierunku elektrotechnika trwały w tamtych latach przez 6 semestrów. Prowadzący przygotowywali na kartkach cotygodniowe porcje zadań i zawieszali je w odpowiedniej gablocie. Częstokroć dla łagodzenia emocji okraszailiśmy zamieszczane zadania „wierszykami”. Oto jeden z nielicznych, który został w moich archiwach:

⁷ Melduję, że byłem wówczas na krótkiej dwudniowej przepustce wojskowej (z jednostki w Oleśnicy koło Wrocławia).

⁸ Promotorem Krzysztofa w Moskwie był Alfred Lwowicz Szelkin. Krzysztof wspominał, że profesor Szelkin bardzo dbał o poziom swoich podopiecznych – odradzał im uczestniczenia w niektórych wykładach (miały być nieciekawe).

*Kiedy układ współrzędnych kartezjański,
wyda Ci się nieciekawym i nieeleganckim —
nie trap się i sięgnij po układ biegunowy
w zanadru masz jeszcze układ sferyczny i krzywoliniowy.*

Rzecz jasna to na okazję zadań z całek wielokrotnych.

Podkreślić trzeba, że do połowy lat dziewięćdziesiątych dydaktyka była bardzo „surowa”. Studenci podczas egzaminów nie mogli wychodzić, chyba że ostatecznie. Egzaminatorzy zazwyczaj „polowali” lub powinni byli „polować” na podejrzanych studentów. Owszem, historyjki z odpisywaniem, oryginalnymi próbami nadużyć przez studentów zdarzały się, ale czy coś w tej materii zmieniło się przez lata? Czy nieomal historyczna dbałość o poprawność dydaktyczną na egzaminach dawała kiedyś lepszy efekt, aniżeli jest to w dzisiejszych stonowanych czasach? Sądzę, że absolutnie nie. Studenci zawsze usiłowali kombinować, a my im w tym przeszkodzić. W tamtych czasach proponowaliśmy studentom, tym niesfornym, w ramach zadośćuczynienia, darcie pasów lub rozrywanie kołmi (specjalizował się w tych propozycjach dr Adam Czech, człowiek pykający non stop fajeczkę, ale i miłośnik oryginalnej angielskiej literatury science fiction). Obecnie proponujemy takim studentom lot szybowcem wykonanym z wosku o nazwie „Potrafił Ikar, możesz i Ty” lub wycieczkę w jedną stronę do Kenii, by w kraterze Ngorongoro dokarmiać głodne lwy w ramach akcji „To nie żarty, masz zostać pożarty, a gdy zostaniesz zjedzony — wykładowca będzie zadowolony”.

Praktycznie od początku pracy w Instytucie Matematyki byłem związany z Zakładem Metod Algebraicznych dowodzonym non stop do końca jego istnienia przez profesora Ernesta Płonkę. Siłą rzeczy byłem więc regularnym uczestnikiem seminarium prowadzonego przez profesora. Miałem tam okazję poznać profesora jako dobrego organizatora i naukowca o szerokich horyzontach. Pomimo tego, że jego właściwym obszarem badań naukowych była algebra, był naprawdę otwarty na nowe pomysły i doświadczenia. Kiedy jeden z uczestników tego seminarium dr Bolesław Wantuła (doktorat z teorii grafów otrzymał na Uniwersytecie Wrocławskim, jego promotorem był profesor L. Szamkołowicz) zaczął się interesować najpierw szczególną teorią względności, a następnie teorią strun (to już w latach 90.), znalazł w profesorze solidne wsparcie moralne i naukowe. Ze względu na okazywaną mu niechęć środowiska dla jego zainteresowań to wsparcie było niezwykle ważne dla kolegi Bolesława; mnie osobiście nauczyło pokory i wyrozumiałości wobec ludzkich pasji, zrozumienia dla intuicji dobrze umotywowanej, nawet jeśli jest bardzo odległa od naszego postrzegania tematu⁹. Nie ukrywam też, że również moje ciągoty do zagadnień szeregowych, nawet tych w przestrzeniach unormowanych, znajdowały w profesorze pewne zainteresowanie, co widoczne było w bezpośredniej rozmowie, uwagach i komentarzach profesora. Z perspektywy minionych lat jestem mu za to bardzo wdzięczny.

⁹ Chciałbym też wspomnieć, że podczas studiów dr Wantuła prowadził dla nas wykład i ćwiczenia z teorii grafów. Były to zajęcia prowadzone żarliwie, z pełnym zaangażowaniem. Zainspirowało mnie to m.in. do zajęcia się teorią Ramseya. Dr Wantuła rozstrzygnął też negatywnie pewien problem Ulama (omawiamy go szczegółowo w dodatku A) — referat o tym problemie przedstawił co najmniej dwukrotnie na seminarium profesora Płonki.

Na seminariach profesora Płonki często swoje referaty wygłaszali koledzy współpracujący z pracownikami wydziałów technicznych (m.in. Wydziału Górnictwa i Geologii czy Wydziału Automatyki, Elektroniki i Informatyki). Zmuszało to stałych uczestników seminarium do wysiłku intelektualnego, jak też do permanentnego pogłębiania wiedzy.

Na wspomnienie zasługuje jeden z oryginalnych uczestników seminariów, doktorant profesora Płonki kolega Jerzy Kogut, który po obronie swojego doktoratu na Uniwersytecie Wrocławskim (z analizy harmonicznej) w 1985 roku¹⁰ dość szybko zniknął z listy pracowników uczelni, co w tamtych czasach mogło mieć przede wszystkim podtekst polityczny. Kolega Kogut został potem jednym ze współwłaścicieli znanej księgarni „U trzech Panów” w Bytomiu — zlokalizowanej tuż obok dworca autobusowego i kolejowego (dzisiaj księgarnia ta jest już tylko wspomnieniem).

Zajęcia dydaktyczne ze studentami matematyki rozpocząłem w 1988 roku pod czujnym okiem dra Szymona Rabsztyna (prowadziłem, a właściwie asystowałem w prowadzeniu ćwiczeń z procesów stochastycznych). W kolejnych latach prowadziłem ćwiczenia do wykładów:

- profesora Romana Gera, jednego wykładu z wybranych działów równań funkcyjnych i drugiego z teorii miar wektorowych (wg klasycznej już dzisiaj monografii Diestela i Uhla „Vector Measures”),
- profesora Karola Barona z analizy funkcjonalnej.

Wszystkie te zajęcia były fantastyczną, bardzo inspirującą przygodą. Warto podkreślić, że uczęszczałem też na wykłady profesora Gera (ze wspomnianych powyżej przedmiotów), gdzie na bieżąco notowałem życzenia profesora co do elementów ćwiczeń, np. *proszę przeprowadzić na ćwiczeniach stosowny dowód* lub *proszę spróbować udowodnić następujące „proste” fakty*¹¹. Było to olbrzymią motywacją do pracy, a przy okazji do poszerzenia horyzontów.

Pewnego razu wcześniej rano – czyli koło godziny ósmej wg standardów akademickich – tuż przed wykładem profesora Gera z miar wektorowych przybiegłem do profesora z owo-

¹⁰ Pamiętam ówczesną opinię kolegi Jurka o matematykach wrocławskich z seminarium profesora Hulanickiego, gdzie terminował i szlifował swoją pracę doktorską. Opowiadał bardzo poruszony: *oni są niesamowici; nonstop coś piszą, zapisują, są jakby obok ciebie. Chociaż mogłem ich zagadnąć, to porozmawiać dało się już tylko mocno merytorycznie o matematyce*. Takie życie to jednak nie jest dla mnie. Nadmienię, że właśnie dzięki takim opiniom kształtował się wówczas nas młodych adeptów „świata nauki” pogląd na bycie matematykiem zawodowym. Nagle okazywało się, że pasja to o wiele za mało, że właściwie matematyka powinna stać się twoją codziennością, a ty jej, matematyki, narzędziem sprawczym.

¹¹ Jedną ze studentek z grupy, z którą miałem ćwiczenia do wykładów profesora Gera z wybranych działów równań funkcyjnych, była wówczas Kasia Szachulska, czyli znana dziś wszystkim pracownikom Wydziału Pani mgr inż. Kasia Komorowska, związana z naszym Wydziałem od zakończenia swoich studiów najpierw jako doktorantka, a następnie jako pracownik administracyjny. Do niedawna przed reorganizacją była szefową sekretariatu w Instytucie Matematyki, teraz szefową sekretariatu Katedry Matematyki. Na roku Pani Kasi studiował też w ramach ITS-u Tomasz Szarek – dzisiaj profesor nauk matematycznych, obecnie kierownik Zakładu Matematyki Stosowanej i Probabilistyki Uniwersytetu Gdańskiego. Studia na Politechnice Śląskiej ukończył w 1992 roku – promotorem jego pracy magisterskiej był wówczas świeżo upieczony doktor Waldemar Hołubowski. Kolega Tomasz Szarek studiował równolegle matematykę na Uniwersytecie Śląskim, gdzie początkowo związany był z profesorem Karolem Baronem, a następnie przeniósł się do zespołu biomatematyki kierowanego przez profesora Andrzeja Lasotę.

cem swojej nocnej pracy — nowym dowodem twierdzenia Lapunowa o wypukłości obrazu miar wektorowych skończenie wymiarowych. Dowód był przejrzysty, takie tam półtorej strony formatu A4. Profesor przejrzał dowód raz, potem drugi raz, wreszcie uniósł głowę i z uśmiechem pełnym sympatii oznajmił: *tak, to jest bardzo ładny dowód, ale byłby niezwykle zgrabnym dowodem twierdzenia Lapunowa, gdyby nie to dzielenie wektorów z R^n w tym miejscu* — wskazał palcem. Cóż, niezbadane są koleje losów naszych dokonań!

Profesor Baron miał bardzo dobre podejście dydaktyczne do swoich „ćwiczeniowców”. Jego życzenia wydawały się skromne: tradycyjnie na ćwiczeniach nie wyprzedzać wykładu, starać się ciekawie ilustrować wyłożony materiał, ewentualnie wykonać (odpowiednio zrealizować) na ćwiczeniach zasugerowane przez profesora zadania (odpowiednio tematy). W razie jakichkolwiek problemów, również w kontaktach ze studentami, można było zwrócić się do profesora o pomoc i o radę. Co do formy i sposobu prowadzenia zajęć profesor uważał to za sprawę indywidualną, gdyż każdy powinien indywidualnie szlifować swój dydaktyczny kręgosłup. Jednak dopiero w kilku nietypowych sytuacjach mogłem przekonać się o klasie dydaktycznej profesora Barona (rzecz jasna ta naukowa była bezsporna). Kiedyś, po pierwszym terminie egzaminu, profesor poprosił mnie do siebie i zapytał, co mogło spowodować, że pan X z dobrym zaliczeniem z ćwiczeń wypadł bardzo błodo na egzaminie. Powiedziałem profesorowi o nieco wolniejszym rozruchu tego studenta, ale w niczym nie umniejszającym jego możliwości twórczych. Profesor w trakcie drugiego terminu egzaminu z zadaniami w stylu (autentyk):

1. Wyjaśnij pojęcia:
 - a) przestrzeń liniowo-topologiczna,
 - b) przestrzeń liniowo-topologiczna lokalnie zwarta,
 - c) przestrzeń Frecheta.
2. Niech (X, τ) będzie przestrzenią liniowo-topologiczną i niech $A, B, C \subset X$. Wiemy, że zbiory $A + C$ oraz B są wypukłe. Czy zbiór $A + B + C$ też jest wypukły?

po prostu zamknął pana X w swoim gabinecie na około cztery godziny i nie zawiódł się. Pan X udzielił odpowiedzi w dobrym stylu, wyczerpująco, na prawie dziecięciu stronach formatu A4.

W innym przypadku bardzo dobra studentka pani Y nie pojawiła się na dwóch pierwszych terminach egzaminu (jeden na początku lipca, drugi na początku września). Profesor poprosił mnie o możliwe wyjaśnienie zaistniałej sytuacji. Okazało się, że to sytuacja domowa (rodzice posiadali gospodarstwo rolne) była przyczyną. Na trzecim terminie, pod koniec września, pani Y pojawiła się już i napisała egzamin na piątkę.

Od 1988 roku zacząłem uczęszczać na seminaria w oddziale IMPAN w Katowicach, mieszczącym się w dużym mieszkaniu przy ulicy Staromiejskiej. Aktywnymi członkami tego seminarium byli wówczas ludzie związani z naszym Wydziałem: mgr J. Uryga, będący w trakcie pisania doktoratu, dr J. Pochciał, bez przerwy pracujący na Wydziale, dr J. Burzyk, który rozpoczął pracę dydaktyczną na naszym Wydziale w 1993 roku, i zastępca szefa tej

jednostki, wówczas jeszcze dr hab. Andrzej Kamiński¹², który pracował na Wydziale w latach 1991–2000. Szefem oddziału był wówczas prof. Piotr Antosik, a po jego przejściu na emeryturę został nim profesor A. Kamiński.

Moja przygoda matematyczna, wspaniałe doświadczenie naukowe wiążące mnie z tym ośrodkiem, a przy tej okazji z wieloma kolegami z Uniwersytetu Śląskiego, trwała 10 lat. Spotkania odbywały się regularnie, dwa razy w tygodniu, we wtorki i czwartki, pomiędzy godzinami 10 i 12 część oficjalna, a później nieoficjalnie do 15, a nawet znacznie dłużej.

Profesor A. Kamiński był promotorem pracy doktorskiej J. Urygi pt. „Operacje w przestrzeniach funkcji typu Gelfanda-Szyłowa”, obronionej w 1989 roku w IMPAN, a następnie, gdy pracował już na naszym Wydziale, promotorem mojej pracy doktorskiej. Dzięki wsparciu profesora Kamińskiego ukazała się dość ważna w mojej karierze naukowej praca [19]¹³. Przy jej publikowaniu konsultowaliśmy się m.in. z profesorem Czesławem Ryllem-Nardzewskim z Politechniki Wrocławskiej. Nieco później poznałem profesora Rylla-Nardzewskiego osobiście – gigant polskiej matematyki, człowiek z wielką klasą. Co istotne dla niniejszego tekstu, za każdym razem, gdy przyjeżdżałem z wizytą naukową lub towarzyską na Uniwersytet lub Politechnikę Wrocławską, profesor Nardzewski zapraszał mnie na osobistą rozmowę. Żywo interesował się nowymi wynikami „ludzi z Gliwic”, prosił o opowiedzenie o rozważanych w Gliwicach zagadnieniach i problemach, namawiał do nawiązania współpracy z matematykami z Wrocławia. Te spotkania wciąż są żywe w mojej pamięci. Profesor Nardzewski zmarł w 2015 roku.

Chciałem również przypomnieć, że profesor A. Kamiński miał wpływ na rozwój kariery naukowej pana doktora Andrzeja Starosolskiego. Profesor Kamiński zorganizował ważny w karierze kolegi Andrzeja kontakt z profesorem Szymonem Doleckim — promotorem jego pracy doktorskiej, naszym rodakiem na stałe pracującym we Francji (obecnie emerytowany profesor Uniwersytetu Burgundzkiego w Dijon), uznanym specjalistą od podstaw strukturalnych analizy funkcjonalnej i topologii. Ostatni młody podopieczny profesora Kamińskiego pan Wojciech Kaszowski, który studiował równolegle informatykę na Wydziale Automatyki, Elektroniki i Informatyki, człowiek o fantastycznych możliwościach intelektualnych¹⁴, ostatecznie wybrał karierę w branży informatycznej. Profesor A. Kamiński podczas pracy na naszym Wydziale był kierownikiem Zakładu Analizy Rzeczywistej.

¹² Tytuł profesora nauk matematycznych Pan Andrzej Kamiński otrzymał 12 maja 1999 roku.

¹³ Kiedyś, po nastu latach od opublikowania tej pracy, kolega Józef Burzyk bardzo chciał się ze mną zobaczyć i pochwalić świeżo odkrytą techniką dowodu pewnych twierdzeń o miarach, opartą na prostym wariancie twierdzenia Kakeyi (zob. [2]). Ku mojemu zaskoczeniu było to kompatybilne z częścią wyników właśnie z pracy [19]. Józek sprawdził później swoje pomysły z tymi z tej pracy i przekazał mi, że szkoda, ale wcale się nie dziwi wdrożeniu pomysłu z wykorzystaniem twierdzenia Kakeyi, stwierdził, że gdyby nie ja czy on, to i tak w końcu ktoś by to zrobił.

¹⁴ Miałem przyjemność prowadzić ćwiczenia z topologii z grupą, do której należał pan Kaszowski. W moich papierach zachowało się kolokwium pana Kaszowskiego na 12 stronach formatu B5, bardzo dojrzałe, właściwie perfekcyjne. Praca magisterska tego młodego człowieka pt. „Operacja splotu funkcji uogólnionych w przestrzeniach dualnych do przestrzeni Szyłowa typu S'' ” zawierała wiele nowych wyników.

W 1991 roku w Instytucie Matematyki rozpoczął pracę profesor Władimir Grigorjewicz Sragowicz, Rosjanin¹⁵. Pracował tylko przez kilka lat, do 1996 roku (zmarł w 2000 roku w Bytomiu, gdzie został pochowany na cmentarzu w Szombierkach), ale zostawił po sobie wspaniałego ucznia Adama Czornika, dzisiaj już profesora belwederskiego w dziedzinie nauk technicznych automatyka (jest naprawdę wielkim autorytetem w tej dyscyplinie). Na drugim roku studiów kolegi Adama byłem jego „ćwiczeniowcem” do zajęć z topologii i analizy funkcjonalnej. Studenci tworzyli wówczas tylko jedną grupę ćwiczeniową; wśród nich był też kolejny już dzisiaj profesor belwederski z dziedziny nauk technicznych Aleksander Nawrat (obecnie pracownik Instytutu Automatyki Politechniki Śląskiej).

Profesor W. Sragowicz był bardzo znanym matematykiem również wśród polskich matematyków (za sprawą wydanej w Polsce książki); fakt, że nagle został pracownikiem naszego Instytutu Matematyki, wzbudził zaskoczenie i poruszenie nawet wśród kolegów matematyków z Uniwersytetu Śląskiego szczerze gratulujących nam takiego nabytku. Profesor Sragowicz tytuł kandydata nauk uzyskał w latach 50., jego opiekunem naukowym był wielki rosyjski probabilista Aleksandr Jakowlewicz Chinczyn. Na koniec swej kariery zawodowej w Rosji pracował jako szef Instytutu Cybernetyki w Centrum Obliczeniowym Akademii Nauk ZSSR; opowiadał, że miewał do 30 doktorantów rocznie. Potem przeniósł się do Polski. Przez rok (1990–1991) pracował w IPPT PAN w Warszawie.

15 lutego 1996 roku na Wydziale rozpoczął pracę profesor Witalij Suszczański z Ukrainy. Miał polskie korzenie (mama profesora była Polką). Profesora już nie ma wśród nas — zmarł 29 października 2016 roku. Był jednym z filarów naszego Wydziału, promotorem pięciu sfinalizowanych doktoratów; jeden z podopiecznych profesora Suszczańskiego, kolega Adam Woryna, od 2019 roku jest doktorem habilitowanym nauk matematycznych. Profesor miał ogromny wpływ na pracowników Wydziału. Śmiało można powiedzieć, że wielu spośród nas zawdzięcza mu bardzo dużo; był opiniotwórczy, trochę jak wyrocznia. Zazwyczaj z upływem lat przekonywano się, jak wiele było racji w jego sugestiach.

To trochę nieoczekiwane, ale Profesor na moja prośbę, wykorzystując swoje znajomości, kilkakrotnie zorganizował dla mnie kserokopie artykułów z trudno dostępnych ukraińskich czasopism matematycznych. Był bardzo życzliwy.

Profesor Suszczański również miał swojego matematycznego idola. W moich rozmowach z Profesorem często pojawiała się osoba Israela Moisiejewicza Gelfanda, wybitnego rosyjskiego matematyka, wielkiej postaci w historii matematyki¹⁶. Profesor wspierał się jego opiniami i śledził jego twórczość. Osobom zainteresowanym wybranymi faktami z biografii i twórczości Gelfanda polecam książkę [5] napisaną przez Edwarda Frenkla, człowieka, który wpisuje się w tak ważną dla samego Gelfanda, stworzoną przez niego

¹⁵ Był współautorem książki przetłumaczonej z języka rosyjskiego: Buslenko N.P., Golenko D.I., Sobol I.M., Sragowicz W.G., Szrejder J.A., *Metoda Monte Carlo*, PWN, Warszawa 1967. Na rosyjskiej stronie Wikipedii: ru.wikipedia.org/wiki/Срагович_Владимир_Григорьевич, można przeczytać o polskim pochodzeniu profesora Sragowicza.

¹⁶ Ze swoich czasów studenckich pamiętam o podręczniku Gelfanda „Wykłady z algebry liniowej”. Gelfand był też założycielem i głównym redaktorem niezwykle ambitnego czasopisma „Функциональный анализ и его приложения”.

szkołę matematyczną. Odnotujemy, że pod koniec swojego życia Gelfand wyjechał na stałe do USA.

Na zakończenie mojej krótkiej opowieści o ludziach tworzących historię naszego Wydziału w okresie 1981–2000 chciałbym jeszcze wspomnieć o kilku ważnych z perspektywy lat wątkach. Bardzo istotnym ze względów integracyjnych i poznawczych miejscem dla studentów, absolwentów oraz pracowników, zwłaszcza tych młodszych, była chatka studencka „Pod Solniskiem” w Lachowicach, przysiółek Adamy (na trasie kolejowej relacji Żywiec — Sucha Beskidzka). To tam poznawaliśmy się, prowadziliśmy dyskusje. Wśród bywalców chatki byli m.in. Marek Żabka, Witold Tomaszewski, Damian Słota, Alina Domanska (wówczas Dziechciarczyk), Mirka i Jacek Pawłyta, Andrzej Rakowski, Heniek Gliński, Kazimierz Gut — to tylko ci, którzy swoje życie zawodowe związali z Politechniką, ale byli też inni, na przykład: Piotr Drąg, Jurek Sosinka, Arek Baron, Michał Piwowarczyk, Andrzej Wika oraz wielu, wielu innych, których nie sposób tu wymienić. Zdarzały się też wyjazdowe zajęcia w chatce (osobiście pamiętam o trzech takich wyjazdach, i to zarówno jako uczestnik, jak i organizator). Oczywiście pobyty w chatce wiązały się z nawiązywaniem kontaktów, wszak gościli tam studenci niemal wszystkich śląskich oraz krakowskich uczelni. Bywali goście rozmaitych profesji i pasji.

Wszystkich matematyków pracujących na Wydziale łączyło jedno miejsce. W latach 80. był to dziekanat w budynku przy ul. Zwycięstwa z panią Marianną Konkol — dzisiaj legendą naszego Wydziału, a później, po przeprowadzce Wydziału do budynku biblioteki przy ul. Kaszubskiej, sekretariat Instytutu Matematyki, gdzie przez prawie 20 lat królowała pani Halina Mandelska. Poza rutynowymi spotkaniami miejsca te były źródłem permanentnych anegdot, ścierania się wielu opinii. Chociaż pani Haliny Mandelskiej już nie ma wśród nas, to nadal bywa obecna żywa we wspomnieniach jej charyzmatyczna osobowość i emocjonalne zaangażowanie w swoją pracę.

Dodatek A. Hipoteza Ulama

Ze względu na słabą znajomość tego problemu w środowisku – wszak Ulam sformułował wiele problemów (zob. książki [16, 17] i artykuł [11]) – proponuję przypomnieć go tutaj w odpowiednim skrócie (materiał bazowy pochodzi przede wszystkim z pracy [6]). Rozpocznijmy od przypomnienia kilku niezbędnych pojęć. Mianowicie obiektem będziemy nazywać czwórkę uporządkowaną (X, W, f, R) , gdzie: X jest zbiorem niepustym i skończonym, tzw. nośnikiem obiektu, W zbiorem cech przysługujących elementom zbioru X , $f: X \rightarrow \mathcal{P}(W)$ i standardowo $\mathcal{P}(W)$ oznacza zbiór potęgowy zbioru W , R jest rodziną relacji na X o dowolnej liczbie argumentów, opisujących strukturę zbioru X . Czwórkę postaci $(X, \emptyset, \emptyset, R)$ będziemy oznaczać krótko jako dwójkę uporządkowaną (X, R) i nazywać obiektem uniwersalnym. Kolejne dwie definicje dotyczą izomorfizmu obiektów.

Definicja 1. Dwa obiekty uniwersalne (X_k, R_k) , $k = 1, 2$, nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieją bijekcje $f_1: X_1 \rightarrow X_2$ i $f_2: R_1 \rightarrow R_2$ spełniające warunki:

- 1) $(\forall R \in R_1) (\forall n \in \mathbb{N})$ (jeśli R jest n -arna, to również $f_2(R)$ jest n -arna),
- 2) $(\forall R \in R_1) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall (a_1, \dots, a_n) \in X_1^n)$ (jeśli R jest n -arna i $(a_1, \dots, a_n) \in R$, to również $(f_1(a_1), \dots, f_1(a_n)) \in f_2(R)$ i vice versa, jeśli $f_2(R)$ jest n -arna i $(f_1(a_1), \dots, f_1(a_n)) \in f_2(R)$, to $(a_1, \dots, a_n) \in R$).

Definicja 2. Z kolei powiemy, że dwa obiekty $O_k = (X_k, W_k, f_k, R_k)$, $k = 1, 2$, są izomorficzne, jeżeli istnieją bijekcje:

$$g_1: X_1 \rightarrow X_2, \quad g_2: W_1 \rightarrow W_2 \quad \text{ i } \quad g_3: R_1 \rightarrow R_2,$$

takie że:

- 1) $(\forall x \in X_1) (g_2(f_1(x)) = f_2(g_1(x)))$,
- 2) $(\forall R \in R_1)$ (relacje R oraz $g_3(R)$ mają tę samą arność),
- 3) $(\forall R \in R_1) (\forall n \in \mathbb{N}) (\forall (a_1, \dots, a_n) \in X_1^n)$ (jeśli R jest n -arna i $(a_1, \dots, a_n) \in R$, to również $(g_1(a_1), \dots, g_1(a_n)) \in g_3(R)$ i vice versa, jeśli relacja $g_3(R)$ jest n -arna oraz $(g_1(a_1), \dots, g_1(a_n)) \in g_3(R)$, to także $(a_1, \dots, a_n) \in R$).

Można łatwo udowodnić następujący fakt.

Twierdzenie 1. Relacja izomorfizmu obiektów jest relacją równoważności.

Niezbędne jest jeszcze pojęcie podobieństwa dwóch obiektów. Rozpocznijmy od pojęcia podobiektu.

Definicja 3. Powiemy, że obiekt $O_1 = (X_1, W_1, f_1, R_1)$ jest podobieństwem danego obiektu $O = (X, W, f, R)$, gdy spełnione są warunki:

$$X_1 \subset X, \quad W_1 \subset W, \quad (\forall x \in X_1) \left(f_1(x) = (f|_{X_1}(x)) \cap W_1 \right)$$

oraz:

$$(\forall r_1 \in R_1) (\exists r \in R) (r_1 \subset r).$$

Definicja podobieństwa dwóch obiektów jest następująca:

Definicja 4. Powiemy, że dwa obiekty, A i B , są podobne ze względu na wyróżnioną rodzinę obiektów $\mathcal{K}$, jeżeli istnieje obiekt $C \in \mathcal{K}$, który jest izomorficzny z pewnymi podobieństwami obiektów A i B . W szczególności jeśli $C = (X, W, f, \emptyset)$, to mówimy o podobieństwie obiektów A i B ze względu na cechy elementów nośników tych obiektów, natomiast gdy $C = (X, \emptyset, \emptyset, R)$, to mówimy o podobieństwie obiektów A i B ze względu na strukturę tych obiektów.

Na zakończenie fazy przygotowań technicznych wprowadzimy jeszcze definicję mapy i atlasu obiektu.

Definicja 5. Mapą obiektu $O = (X, W, f, R)$ nazywamy dowolny podobiekt $O_1 = (X_1, W_1, f_1, R_1)$ obiektu O spełniający dwa warunki:

- 1) $(\forall x \in X_1) (f(x) \in W_1, f_1(x) = f(x))$, tzn. $f_1 = f|_{X_1}$, nie naruszając ogólności rozważań, można przyjąć, że:

$$W_1 = \bigcup_{x \in X_1} f(x),$$

- 2) $(\forall r_1 \in R_1) (\exists r \in R) (r_1 = r \cap X_1^n)$, gdzie n jest arnością relacji r , umownie piszemy wówczas, że $R_1 = R|_{X_1}$.

Definicja 6. Z kolei atlasem obiektu $O = (X, W, f, R)$ nazywamy niepusty zbiór map $\{(X_i, W_i, f_i, R_i) : i \in I\}$, gdzie I jest pewnym zbiorem indeksów, taki że:

- 1) $\bigcup_{i \in I} X_i = X$,
- 2) $\bigcup_{i \in I} W_i = \bigcup_{x \in X} f(x)$,
- 3) $(\forall r \in R) (\text{jeśli } n \in \mathbb{N} \text{ jest arnością } r, \text{ to } r = \bigcup_{i \in I} (r \cap X_i^n))$,

podsumowując, dostajemy:

$$\bigcup_{r \in R} r = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{\varrho \in R_i} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\varrho \cap X_i^n).$$

Zauważmy, że jeśli dodatkowo założymy, że w rozważanych obiektach (X, W, f, R) mamy:

$$W = \bigcup_{x \in X} f(x),$$

to możemy udowodnić, że dwa obiekty $O_k = (X_k, W_k, f_k, R_k)$, $k = 1, 2$, są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją izomorficzne atlasy $\{(Y_{1,i}, W_{1,i}, f_{1,i}, R_{1,i}): i \in I\}$ oraz $\{(Y_{2,j}, W_{2,j}, f_{2,j}, R_{2,j}): j \in J\}$ tych obiektów, tzn. gdy istnieje bijekcja $g: I \rightarrow J$, taka że dla każdego $i \in I$ obiekty $(Y_{1,i}, W_{1,i}, f_{1,i}, R_{1,i})$ oraz $(Y_{2,g(i)}, W_{2,g(i)}, f_{2,g(i)}, R_{2,g(i)})$ są izomorficzne.

Ponadto jeśli dany atlas jest równocześnie atlasem dwóch obiektów, to obiekty te są identyczne, przy czym dwa obiekty $O_k = (X_k, W_k, f_k, R_k)$, $k = 1, 2$, są identyczne, gdy zachodzą równości:

$$X_1 = X_2, \quad W_1 = W_2, \quad f_1 = f_2 \quad \text{oraz} \quad R_1 = R_2.$$

Uwaga 1. Atlas stanowi defragmentację danego obiektu, pozwalającą go odtworzyć. Cel takiej defragmentacji to otrzymanie pomocniczych obiektów – map atlasu, które łatwiej jest analizować aniżeli dany obiekt.

Sformułujemy teraz hipotezę Ulama [17] dla obiektów.

Hipoteza Ulama. Jeżeli dla obiektów $O_k = (X_k, W_k, f_k, R_k)$, $k = 1, 2$, istnieje bijekcja $g: X_1 \rightarrow X_2$, taka że:

$$(\forall x \in X_1) \text{ (podobiekty } O_1 \setminus \{x\} \text{ oraz } O_2 \setminus \{g(x)\} \text{ są podobne)},$$

to obiekty O_1 i O_2 są izomorficzne.

Doktor B. Wantuła rozstrzygnął negatywnie tę hipotezę. Proponujemy tu zdemontrować dowód negatywnej odpowiedzi dla odpowiednika tej hipotezy dla macierzy.

Hipoteza Ulama dla macierzy. Niech $A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ i niech a_i oraz b_i oznaczają i -te wiersze odpowiednio macierzy A oraz B dla $i = 1, \dots, n$. Załóżmy, że istnieje permutacja f na zbiorze $\{1, \dots, n\}$, taka że:

$$A \setminus a_i \sim B \setminus b_{f(i)}$$

dla każdego $i = 1, \dots, n$, gdzie symbol $D \setminus d$, gdy D jest macierzą, a d jej wierszem, oznacza macierz powstałą z D przez usunięcie wiersza d . Wówczas macierze A oraz B są izomorficzne. Podkreślmy, że analogiczna hipoteza dla kolumn macierzy również nie jest prawdziwa.

Odpowiedni kontrprzykład podamy dla macierzy zero-jedynkowych. Ścisłej skonstruujemy macierze zero-jedynkowe X oraz Y wymiaru $k \times 2^{k-1}$, gdzie $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, takie że jeśli przez X_i oraz Y_i oznaczymy macierze otrzymane z X oraz Y przez usunięcie i -tych wierszy macierzy, odpowiednio X oraz Y dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$, to wiersze oraz kolumny macierzy Y_i można przestawić tak, by otrzymać macierz X_i dla każdego indeksu $i = 1, 2, \dots, k$, natomiast wierszy oraz kolumn macierzy Y nie da się przestawić tak, by otrzymać macierz X .

Najpierw ustawmy w postaci kolumn w dowolnej kolejności wszystkie 2^{k-1} ciągów zero-jedynkowych. Utworzą one pierwsze $(k-1)$ -wierszy identycznych macierzy X oraz Y . Z kolei k -te wiersze macierzy X oraz Y tworzymy w następujący sposób: wpisujemy w k -tym wierszu zera albo jedynki, tak by liczba zer w każdej kolumnie macierzy X była parzysta, natomiast liczba zer w każdej kolumnie macierzy Y była nieparzysta.

Dla tak otrzymanych macierzy X oraz Y ustalmy dowolnie $1 \leq i \leq k-1$. Niech X_i oraz Y_i będą macierzami otrzymanymi odpowiednio z X oraz Y przez usunięcie i -tego wiersza. Zauważmy, że kolumny macierzy możemy ustawić jednoznacznie w 2^{k-2} par kolumn, których elementy od pierwszego do $(k-2)$ -ego są identyczne, a różnią się dopiero $(k-1)$ -szym elementem, gdyż różne były odpowiednie elementy w usuniętym i -tym wierszu. Zamieniając miejscami (transponując) kolumny wszystkich wskazanych par kolumn macierzy Y_i , otrzymamy macierz X_i . Oczywiście $X_k = Y_k$.

Z kolei wierszy oraz kolumn macierzy Y nie można przestawić tak, by otrzymać macierz Y , ponieważ w tak przestawionych macierzach macierzy Y liczby zer w poszczególnych kolumnach mają niezmienną parzystość, inną aniżeli w przypadku kolumn macierzy X .

Uwaga 2. Gdyby do skonstruowanych powyżej macierzy X oraz Y dołączyć dodatkowo po $(s-k)$ wierszy równych odpowiednio k -temu wierszowi tych macierzy, to otrzymujemy macierze X oraz Y rozmiaru $s \times 2^{k-1}$ dla każdego $s \in \mathbb{N}$, gdzie $s \geq k$, dla których nie zachodzi hipoteza Ulama dla macierzy.

Konkluzja. Fakt, że hipoteza Ulama nie zachodzi w klasie obiektów, prowadzi do ciekawych wniosków (porównywalnych filozoficznie do zasady nieoznaczoności Heisenberga w fizyce, zob. [3]). Otóż jeżeli chcemy zbadać pewien obiekt nawet najdokładniej, jak tylko będzie to możliwe, ale wykonując badanie na ustalonym atlasie tego obiektu, to może się okazać, że nadal nie będziemy znać i rozumieć tego obiektu całościowo, i to niezależnie od wybranego do analizy atlasu. Co gorsza, wyniki uzyskane z analizy dwóch różnych atlasów (tego samego obiektu) będą mogły sugerować, że opisane przez nie obiekty są nieizomorficzne!

Wreszcie dochodzimy do następującej sentencji o poznawalności świata: *świat jako obiekt wydaje się nierozpoznawalny – stanowimy łącznie z naszą wiedzą ledwo skromną namiastkę atlasu tego świata – nie mamy więc możliwości poznania go, doświadczenia w całości*. A czyż w sensie filozoficznym nie jest to tożsame z poglądami wielkich filozofów:

- teorią monad Gottfrieda Wilhelma Leibniza (1646–1716) (zob. [10, str. 66–68], [12, str. 146–147] lub [13, str. 162–163] w wersji angielskiej):

Każda dusza ludzka jest monadą, a ciało każdego człowieka jest zbiorem monad dostosowanych do formy duszy. Każda monada jest inna, każda różni się od wszystkich pozostałych. Tworzą one hierarchię, na której szczycie jest monada najwyższa – Bóg.

Tylko Bóg beczasowy i doskonały ma wiedzę zupełną o wszystkim;

- nominalizmem Wilhelma Ockhama (ok. 1300 – ok. 1350) (zob. [10, str. 21–23]), stawiającym pytania w stylu (ujęcie uwspółcześnione):

Czym jest (...) rzecz taka jak koncert fortepianowy Chopina? Czy jest to kawałek papieru z zapisem nutowym? Czy może zdarzenie, które zaszło w umyśle Chopina? Czy może każde poszczególne wykonanie tego utworu?

Dodałbym, a kim są wobec tego laureaci konkursów fortepianowych im. Fryderyka Chopina?

- Niefilozof i nieteolog Blaise Pascal (1623–1662) i jego zakład (zob. [10, str. 78–79]):

Zakład dotyczy istnienia Boga. Rozum nie może sprawy rozstrzygnąć, trzeba więc sprawę poddać decyzji takiej jak w grach hazardowych. Trzeba obliczyć wysokość stawki i możliwą wygraną (ale też i przegraną). Stawką, jeśli na Boga stawiam, jest moje życie doczesne, które muszę przemienić w duchu chrześcijańskim, czyli w istocie niewiele. Do wygrania, jeśli na Boga stawiam i wygram, jest życie w nieskończonej szczęśliwości. Cokolwiek zdecydujemy, dopiero śmierć rozstrzygnie, ale i to jedynie przy założeniu, że rozstrzygnie.

Dodatek B. O wybranych zagadnieniach z tamtych lat

1° Na ćwiczeniach z analizy (dotyczących metod całkowania) prowadzonych przez panią magister Aleksandrę Rost¹⁷ zaproponowałem następujące zadanie:

Niech $f \in C^1[a, b]$, $f(x) \neq 0$ dla $x \in [a, b]$. Wykonując całkowanie przez części, dostajemy:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{f(x)}{f(x)} - \int f(x) \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} dx = 1 + \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Gdyby odjąć od obydwu stron tej równości wyrażenie $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, to co powinniśmy otrzymać?

(Odp. Oczywiście nie, że $0 = 1$, a jedynie że $\emptyset = \emptyset$.)

Pani magister udzieliła właściwej odpowiedzi na kolejnej godzinie ćwiczeń. Od tej pory to zadanie stało mi się bliskie, jest obecne na moich wykładach i ćwiczeniach z całek nieoznaczonych przez całą karierę zawodową w dydaktyce.

2° O narodzinach metody „przez zauważanie”. Na trzecim roku studiów mieliśmy zajęcia z rachunku wariacyjnego, wykłady i ćwiczenia prowadził dr Karol Pethe. Przedmiot wieńczyło pisemne kolokwium. Na kolejnych zajęciach, podczas których omawialiśmy wyniki tego kolokwium, pan doktor poprosił mnie do siebie do katedry i zagadnął:

Wie pan, chodzi mi o jedno z zadań, które jedynie pan rozwiązał, i to w bardzo kontrowersyjny sposób, gdyż dwa zasadnicze rozwiązania liniowo niezależne znalazły się w pana rozwiązaniu bez wyprowadzenia, za to z weryfikacją liniowej niezależności. Ponieważ nikt inny tego zadania nie rozwiązał, więc trudno mi zrozumieć, jak pan otrzymał te rozwiązania.

Odpowiedziałem zgodnie z prawdą, że błyskawicznie ogarnąłem problem, a to podsunęło mi postać tych funkcji. Doktor Pethe nie do końca był usatysfakcjonowany taką odpowiedzią, ale podsumował to słowami: *jeśli tak, to ma pan pierwszorzędną intuicję*. Odtąd taką metodę rozwiązywania odpowiednich problemów przez osoby bardzo utalentowane zacząłem nazywać metodą przez zauważanie. Warto odnotować, że dydaktyka nabiera wówczas nieoczekiwanych zwrotów akcji. Dla podkreślenia tego wątku, a równocześnie dla kontrastu czasowego przytoczę odrobinę świeżych przykładów (rok akademicki 2019/20):

¹⁷Pani Aleksandra Rost obroniła swój doktorat w 1985 roku, jej promotorem była pani profesor Janina Śladowska-Zahorska.

Problem 1. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i niech $\gamma = \overline{AB}$ będzie krzywą regularną łączącą punkty $A(x_1, y_1)$ z $B(x_2, y_2)$, przy czym dla każdego punktu $P(x, y) \in \gamma$ mamy $a \leq x + y \leq b$. Wyraż całkowitą krzywoliniową II rodzaju:

$$\int_{\gamma} f(x+y)(dx+dy)$$

za pomocą całki oznaczonej.

Poniższe rozwiązanie tego problemu zaproponował – bez ociągania – pan Antoni Perużyński, III semestr studiów licencjackich z matematyki.

Ponieważ pole wektorowe utworzone ze współczynników różniczki podcałkowej jest potencjalne, ściśle mamy:

$$[f(x+y), f(x+y)] = \text{grad} \left(\int_0^{x+y} f(t) dt \right)$$

(stosujemy twierdzenie o różniczkowaniu całki oznaczonej $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x, t) dt$ po parametrze x), więc:

$$\int_{\gamma} f(x+y)(dx+dy) = \int_{x_1+y_1}^{x_2+y_2} f(t) dt.$$

Podobny przykład dla całki:

$$I := \int_{\gamma} f(\sqrt{x^2+y^2})(x dx + y dy),$$

wywołał dużo emocji wśród studenckiej braci, ale wymagał już mojej podpowiedzi. Otóż mamy:

$$\left[x f(\sqrt{x^2+y^2}), y f(\sqrt{x^2+y^2}) \right] = \text{grad} \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} t f(t) dt \right).$$

Stąd wynika, że:

$$I = \int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2}} t f(t) dt.$$

Kolejne zadanie polegało na wyznaczeniu funkcji $u = u(x, y)$, której różniczka zupełna ma postać:

$$du = (y^2 + x^2 - 2xy)(dy - dx).$$

Pani Karolina Tatarczyk, studentka drugiej grupy ćwiczeniowej tego samego rocznika co pan Antoni, odpowiedziała bez wahania, że chodzi o funkcję:

$$u(x, y) = \frac{1}{3}(y^3 - x^3) + x^2y - xy^2.$$

Nadmienie, że oboje państwo, K. Tatarczyk i A. Perużyński, należą do grona naszych najlepszych studentów z bardzo dobrą intuicją.

3° Wariacje na temat twierdzenia Riemanna o sumach podszeregów szeregu warunkowo zbieżnego. W mojej pracy magisterskiej zamieściłem m.in. rozdział z zadaniami i problemami (łącznie z ich rozwiązaniami) ściśle nawiązującymi do tytułowego twierdzenia Riemanna. Chciałbym wykorzystać okazję i podzielić się kilkoma z nich.

a) Pierwsze z nich dotyczy stosu kartek.

Udowodnij, że dla każdego $H > 0$ istnieje rosnący ciąg $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ liczb naturalnych, taki że stos kartek o grubościach kolejno $\frac{1}{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, ma wysokość H .

b) Drugie zadanie dotyczy opisu algebraicznego pewnych zbiorów.

Niech:

$$l_+^1 := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty) : \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \right\},$$

$$l_{(0,1)}^1 := \left\{ \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1) : \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \right\}.$$

Udowodnij, że dla każdego $s > 0$ zbiór:

$$\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) : \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_+^1 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \right\}$$

jest przedziałem postaci $(1 + s, e^s)$, natomiast zbiór:

$$\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - b_n) : \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{(0,1)}^1 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s \right\}$$

jest przedziałem postaci $(\max\{0, 1-s\}, e^{-s})$. Z kolei dla każdego $s > 1$ zbiór:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n : \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_+^1 \wedge \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) = s \right\}$$

jest przedziałem postaci $(\ln s, s-1)$, natomiast dla liczb $s \in (0, 1)$ zbiór:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n : \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_{(0,1)}^1 \wedge \prod_{n=1}^{\infty} (1 - b_n) = s \right\}$$

jest przedziałem postaci $(1-s, -\ln s)$.

c) Trzecie zadanie o zbieżności szeregów z zaburzeniami.

Najpierw udowodnij twierdzenie.

Twierdzenie 2. Niech:

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}.$$

Założmy, że istnieje $\omega \in (0, 1)$, takie że $\omega a_n \geq |b_n|$ dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$. Wówczas dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ utworzony z plus i minus jedynek, taki że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n a_n + b_n) = x.$$

Na tej podstawie udowodnij, że dla dowolnego $p \in \mathbb{R}[x]$, takiego że $p(0) = 0$, $p'(0) \neq 0$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje ciąg $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ utworzony z plus i minus jedynek, taki że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(\varepsilon_n a_n) = x.$$

(Wskazówka. Jeśli $p(x) = \sum_{k=1}^r \gamma_k x^k$, to należy przyjąć:

$$\alpha_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in 2\mathbb{N}-1}} \gamma_k a_n^k \quad \text{oraz} \quad \beta_n = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \in 2\mathbb{N}}} \gamma_k a_n^k$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i zastosować twierdzenie).

Dodatek C. Profesor Zahorski wiecznie żywy

Minęło 5 lat od ukazania się monografii [21] – ostatniego dużego opracowania dedykowanego profesorowi Zahorskiemu. Pamiętam, jaki niedosyt wywołała wówczas sprawa cytowań prac profesora Zahorskiego. W środowisku mówiło się o wieluset cytowaniach pewnych prac profesora, natomiast w odpowiednich bazach (Web of Knowledge, Google Scholar, Scopus), owszem, były godne liczby cytowań, ale zdecydowanie mniejsze od potencjalnie oczekiwanych.

Postanowiłem przy okazji niniejszego opracowania powrócić do tematu cytowań, a powodem tego stała się świeża publikacja w Biuletynie AMS-u o charakterze kreatywno-przeglądowym [4] pt. „Różniczkowalność versus ciągłość: twierdzenia o zawężeniach i rozszerzeniach oraz monstrualne przykłady”, napisana przez specjalistów funkcji rzeczywistych najwyższej próby Krzysztofa C. Ciesielskiego i Juana B. Seoane-Sepúlvedę. Cytowana jest tu tylko jedna z prac profesora Zahorskiego [22]. Nie o liczbę cytowań tu jednak chodzi, ale o kontekst cytowania. Cytowanie to dotyczy ważnego zagadnienia: twierdzenia C^1 -interpolacyjnego i problemu Ulama-Zahorskiego. Profesor Zahorski w artykule [4] przedstawiony jest jako istotny element procesu wieloletnich badań tego zagadnienia. Jego historia rozpoczyna się od sformułowania przez Stanisława Ulama około 1940 roku w Księdze Szkockiej problemu:

Problem 2. Czy dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje funkcja analityczna $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, taka że zbiór:

$$[f = g] := \{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$$

jest nieprzeliczalny?

Profesor Zahorski w artykule [22] pokazuje, że odpowiedź na to pytanie jest negatywna, ściślej dowodzi istnienia funkcji rzeczywistej f klasy $C^\infty(\mathbb{R})$ (nieskończenie wiele razy różniczkowalnej), takiej że dla każdej rzeczywistej funkcji analitycznej $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zbiór $[f = g]$ jest co najwyżej przeliczalny. Ponadto profesor Zahorski sformułował w tym artykule problem, który przyjęło się później nazywać problemem Ulama-Zahorskiego.

Problem 3. Czy dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^∞ (odpowiednio klasy C^n , gdzie $n \in \mathbb{N}$), taka że zbiór $[f = g]$ jest nieprzeliczalny?

Najpierw w 1985 roku czterech tytanów teorii funkcji rzeczywistych: Steven J. Agronsky, Andrew M. Bruckner, Miklós Laczkovich oraz David Preiss, w pracy [1] udowodniło następujące:

Twierdzenie 3. Dla każdej funkcji ciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ istnieje funkcja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalna w sposób ciągły, taka że zbiór $[f = g]$ jest zbiorem nieprzeliczalnym. W szczególności zbiór $[f = g]$ zawiera zbiór doskonały P , taki że $f|_P$ jest funkcją różniczkowalną w sposób ciągły.

Nieomal 10 lat później, w 1994 roku, Aleksandr Olewskij w pracy [14] konstruuje funkcję ciągłą $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, taką że dla każdej funkcji $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 zbiór $[f = g]$ jest co najwyżej przeliczalny.

Wreszcie w 2019 roku w pracy [4] autorzy formułują uogólniony problem Ulama-Zahorskiego, dowodzą kilku nowych twierdzeń, omawiają też uogólnienia tego problemu na funkcje $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Czy można chcieć więcej? Jest piękny problem, jego bogata i żywa historia i tylko jedno cytowanie – przecież tutaj sam fakt cytowania jest już zaszczytem, nobilitacją autora. Człowiek uświadamia sobie, że to samo można właściwie powiedzieć o wielu innych cytowaniach profesora Zahorskiego, których liczba wciąż przyrasta. Z upływem lat prace profesora Zahorskiego nadal inspirują, są istotną częścią nowych badań, a sumaryczna liczba cytowań wydaje się najmniej istotnym wskaźnikiem tych prac.

Dodatek D. Odczyt doktora Marka Żabki

Na seminariach Zakładu Metod Algebraicznych profesora Płonki częstym gościem w latach 90. był kolega Marek Żabka, jeden z doktorantów profesora (doktorat obronił w 1997 roku na Uniwersytecie Śląskim). Częste wystąpienia kolegi Marka wiązały się z dyskusją osiągnięć jego bieżących badań.

Chciałbym w tym dodatku przywrócić do życia treść jednego z wystąpień kolegi Marka Żabki – jak się okazuje jest to jedyny z odczytów Marka, jaki zachował się w całości w moim poźółkłym już archiwum.

Niech $F(x, y)$ oznacza grupę wolną o dwóch generatorach x, y . Przez K oznaczmy komutant grupy F . Celem wystąpienia jest przedstawienie opisu elementów komutanta K . Dla słowa:

$$w = w_1^{n_1} w_2^{n_2} \dots w_k^{n_k},$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$, natomiast ciąg $\{w_i\}_{i=1}^k$ tworzą naprzemian występujące x -y oraz y -i, ponadto $n_i \in \mathbb{Z}$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, k$, przyjmujemy:

$$l(w) := k$$

– długość słowa w oraz ewaluację z względem słowa w :

$$e_w(z) := \begin{cases} \sum_{2|i} n_i, & \text{gdy } w_2 = z, \\ \sum_{2 \nmid i} n_i, & \text{gdy } w_1 = z, \end{cases}$$

dla każdego $z \in \{x, y\}$.

Zachodzi następująca charakteryzacja:

Lemat 1. Słowo $w \in K$ wtedy i tylko wtedy, gdy $e_w(x) = e_w(y) = 0$.

Dowód. Najpierw założmy, że $w \in K$. Z definicji komutanta wynika, że w jest iloczynem komutatorów postaci $w_1^{-1}w_2^{-1}w_1w_2$, gdzie $w_1, w_2 \in F(x, y)$ (bez uwzględnienia ich krotności), a dla komutatora teza jest prawdziwa¹⁸. Teraz niech $w \in F(x, y)$ i $e_w(x) = e_w(y) = 0$. Oczywiście jeśli $w \neq 1$, to musi być $l(w) \geq 4$. Ciąg dalszy dowodu przeprowadzimy indukcyjnie ze względu na długość słowa. Jeśli $l(w) = 4$, to mamy:

$$w = w_1^{n_1}w_2^{n_2}w_3^{n_3}w_4^{n_4},$$

gdzie:

$$w_1, w_2, w_3, w_4 = \begin{cases} x, y, x, y, & \text{gdy } w_1 = x, \\ y, x, y, x, & \text{gdy } w_1 = y, \end{cases}$$

a ponadto $n_1 + n_3 = n_2 + n_4 = 0$, co implikuje równość:

$$w = [w_1^{n_3}, w_2^{n_4}].$$

Teraz dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, założmy, że teza lematu jest prawdziwa dla dowolnych słów $w \in F(x, y)$, takich że $e_w(x) = e_w(y) = 0$ oraz $l(w) = n$. Następnie rozważmy słowo $w \in F(x, y)$, $e_w(x) = e_w(y) = 0$ o długości $l(w) = n + 1$. Przyjmijmy $w = w_1^{n_1}w_2^{n_2}w_3^{n_3}w_4^{n_4} \dots$, gdzie:

$$w_1, w_2, w_3, w_4, \dots = \begin{cases} x, y, x, y, \dots \\ y, x, y, x, \dots \end{cases}$$

oraz $n_i \in \mathbb{Z}$. Łatwo można zauważyć, że:

$$\begin{aligned} w &= w_1^{n_1}w_2^{n_2}(w_1^{-n_1}w_2^{-n_2}w_2^{n_2}w_1^{n_1})w_1^{n_3}w_2^{n_4}w_1^{n_5} \dots = \\ &= [w_1^{-n_1}, w_2^{-n_2}]w_2^{n_2}w_1^{n_1+n_3}w_2^{n_4}w_1^{n_5} \dots \end{aligned} \tag{1}$$

¹⁸Niezbędna jest tu jeszcze własność $e_{w_1w_2}(z) = e_{w_1}(z)e_{w_2}(z)$ dla dowolnych $w_1, w_2 \in F(x, y)$ oraz $z \in \{x, y\}$.

Ogon v otrzymanego słowa:

$$v := w_2^{n_2} w_1^{n_1+n_3} w_2^{n_4} w_1^{n_5} \dots$$

ma długość równą n oraz $e_v(x) = e_v(y) = 0$. Zatem na podstawie założenia indukcyjnego mamy $v \in K$, a stąd również:

$$w = [w_1^{-n_1}, w_2^{-n_2}] v \in K.$$

Teza lematu wynika więc z zasady indukcji matematycznej. $\square$

Wprost z powyższej charakteryzacji, a ściślej z tożsamości (1), wynika następujący rezultat doktora Żabki.

Twierdzenie 4. Komutant grupy $F(x, y)$ jest zbiorem słów dających się zapisać jako iloczyn komutatorów postaci $[w_1^{n_1}, w_2^{n_2}]$, gdzie:

$$w_1, w_2 = \begin{cases} x, y \\ y, x \end{cases}$$

oraz $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$.

Dowód. Przyjmujemy oznaczenia z lematu 1. Na podstawie tożsamości (1) (dotyczy przypadku, gdy $l(w) > 4$) dostajemy:

$$w = [w_1^{-n_1}, w_2^{-n_2}] v,$$

gdzie $v \in K$ oraz $l(v) \geq 4$. Stosujemy tożsamość (1) do słowa v i jeśli w wyniku zastosowania tej tożsamości otrzymamy nowe słowo v' , to albo $v' = 1$, albo $l(v') \geq 4$ i w tym przypadku ponownie stosujemy tożsamość (1) aż do wyczerpania wszystkich w_i . $\square$

Dodatek E. Motywacja i cel pracy naukowej

W czasach gdy studiowałem i rozpoczynałem pracę w Instytucie Matematyki, zarówno pieniądze, jak i dobrobyt nie były aż tak pociągające jak dziś. Zatem zaszczytem była już dla wielu młodych startujących w świecie nauki sama praca w jednostce naukowej. Nagle otwierały się drzwi seminariów, spotkań naukowych, i tych prywatnych, i tych oficjalnych. Celem pracy naukowej miało być oddanie się jej bez reszty. Praca ta miała wymiar ideowy, a wyniki stanowiły zwieńczenie poświęconego czasu i własnego trudu. *Oto uczestniczę w Wielkiej Przygodzie Poznawania Świata i już samo to jest przywilejem* — Michał Heller [7].

Minęły lata, wiele zmieniło się w otaczającym nas świecie. Trwająca nieustannie rewolucja techniczna, a przede wszystkim informatyczna, spowodowała zakłócenie *status quo* pomiędzy motywacją a celem pracy naukowej. Młodzi naukowcy nadal pełni są idej, szalonych marzeń i pasji. Jednak czyha na nich więcej pokus, a co gorsza — motywem pracy naukowej stają się „oficjalnie” pieniądze. Coraz więcej młodych ludzi staje się pracownikami naukowymi działającymi w określonych godzinach pracy. Bywają pozbawieni nutki filozoficznej, kontemplacyjnej, która jest niezbędna do stawania się naukowcem. Chcielibyśmy, aby toczące się zmiany kreowały w rezultacie z młodych adeptów nauki naukowców w starym stylu.

Literatura

1. Agronsky S., Bruckner A.M., Laczkovich M., Preiss D., *Convexity conditions and intersections with smooth functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **289**, No. 2 (1985), 659-677.
2. Bartoszewicz A., Filipczak M., Prus-Wiśniowski F., *Topological and algebraic aspects of subsums of series*. In: *Traditional and present-day topics in real analysis*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2013 (jest dostępna online wśród publikacji Wydawnictwa Uniwersytetu Łódzkiego).
3. De Broglie L., *Zasada nieoznaczoności Heisenberga i probabilistyczna interpretacja mechaniki falowej*, Wydawnictwo Mir, Moskwa 1986 (korzystano z wydania rosyjskiego, które było tłumaczone z oryginalnego wydania francuskiego).
4. Ciesielski K.C., Seoane Sepulveda J.B., *Differentiability versus continuity: restriction and extension theorems and monstrous examples*, Bulletin Amer. Math. Soc. **56**, No. 2 (2019), 211-260.
5. Frenkel E., *Miłość i matematyka, istota ukrytej rzeczywistości*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2015.
6. Gielza M., *Uogólniona hipoteza Ulama*, praca dyplomowa magisterska, promotor dr Bolesław Wantuła, Gliwice 1995.

7. Heller M., *Jak być uczonym*, Copernicus Center Press, Kraków 2017.
8. Józwik I., Terepeta M., *Polskie spojrzenie na twierdzenie Riemanna o tasowaniu*, Wiadomości Matematyczne **55**, Nr 1 (2019), 143-157 (praca jest do pobrania na Research Gate).
9. Kochowski S., *35 lat Wydziału Matematyczno-Fizycznego*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka-Fizyka, z. 91 (2004), 9-70.
10. Kołakowski L., *O co nas pytają wielcy filozofowie*, Wydawnictwo Znak, Kraków 2005.
11. Mauldin D.R., Ulam S.M., *Mathematical problems and games*, Advances in Applied Mathematics **8** (1987), 281-344.
12. Mioduszewski J., *Ciągłość – szkice z historii matematyki*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1996.
13. Mioduszewski J., *Continuity – Eleven Sketches from the Past of Mathematics*, translated 2008-2015 by profesor Abe Shenitzer, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2016.
14. Olevski A., *Ulam-Zahorski problem on free interpolation by smooth functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **342**, No. 2 (1994), 713-727.
15. Szłęk B., *Przyczynek do historii Instytutu Matematyki Politechniki Śląskiej*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka-Fizyka, z. 91 (2004), 87-98.
16. Ulam S.M., *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience, New York 1961.
17. Ulam S.M., *Problems in Modern Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1964.
18. Wantuła B., *Trzeci postulat szczególnej teorii względności i jego konsekwencje*, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Matematyka-Fizyka, z. 60 (1989), 287-330.
19. Wituła R., *Continuity and the Darboux property of nonatomic finitely additive measures, in Generalized Functions and Convergence. Memorial Volume for Professor Jan Mikusiński*, Proceedings of the Conference, Katowice 1990, 377-386.
20. Wituła R., *Pozostałe fragmenty mojej pracy magisterskiej*, Gliwice 1986.
21. Wituła R., Słota D., Hołubowski W. (eds.), *Monograph on the Occasion of 100th Birthday Anniversary of Zygmunt Zahorski*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2015.
22. Zahorski Z., *Sur l'ensemble des points singuliers d'une fonction d'une variable réelle admettant les dérivées de tous les ordres*, Fundamenta Mathematicae **34** (1947), 183-245.