LICZBY HARMONICZNE I ICH UOGÓLNIENIA – FUNDAMENTALNE WŁASNOŚCI ORAZ ZASTOSOWANIA

MICHAŁ RÓŻAŃSKI

LICZBY HARMONICZNE

Liczby harmoniczne H_n dla $n \in \mathbb{N}$ definiujemy następująco:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Zauważmy też, że można liczby harmoniczne zapisać za pomocą następującej całki pochodzącej od samego Leonharda Eulera:

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Wynika to stąd, że:

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_0^1 x^{k-1}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n.$$

Stosując podstawienie $x = 1-t$ znajdujemy:

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(1-t)^n}{t}\mathrm{d}t = \\ = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\int_0^1 t^{k-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{k},$$

co promuje nam kolejny wzór na liczby harmoniczne. Odpowiednia relacja odwrotna ma wówczas postać:

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}H_k.$$

Ponadto, z zależności (1), znajdujemy:

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}H_k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1\frac{1-x^k}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} - \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k}{1-x}\mathrm{d}x = \\ = \int_0^1 \frac{2^n-(1+x)^n}{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2^n-(2+(x-1))^n}{1-x}\mathrm{d}x = \\ = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}\int_0^1(x-1)^{k-1}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}2^{n-k}\binom{n}{k}\frac{1}{k}.$$

Komentując powyższe rachunki możemy powiedzieć, że liczby harmoniczne stanowią transformację dwumianową ciągu anharmonicznego, natomiast transformacja dwumianowa ciągu liczb harmonicznych pokrywa się z interpolującą transformacją dwumianową rzędu dwa ciągu anharmonicznego [1].
Funkcja tworząca dla liczb harmonicznych to:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n z^n = -\frac{\ln(1-z)}{1-z}.$$

ZBIEŻNOŚĆ CIĄGU LICZB HARMONICZNYCH

Z rozbieżności szeregu harmonicznego wynika, że $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$. Co jednak ciekawe, to znamy asymptotykę tej rozbieżności. Otóż wiemy, że (również za sprawą L. Eulera):

$$\lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) = \gamma,$$

gdzie $\gamma = 0{,}577215\ldots$ to słynna stała Eulera, o której wciąż nie wiemy czy jest liczbą niewymierną (a czego się powszechnie spodziewamy). Do niedawna znane było jedynie następujące rozwinięcie asymptotyczne:

$$H_n = \gamma + \ln n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O\left(n^{-4}\right).$$

Współczesny rumuński matematyk Cristinel Mortici [5] rozważył uogólnienie tego problemu. Rozpoczął dyskusję ciągów:

$$w_n = w_n(a) := H_n - \gamma - \frac{1}{2}\ln\left(n^2+n+a\right),$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$. Udało mu się udowodnić, że:

1. jeśli $a \neq \frac{1}{3}$, to $\lim_{n\to\infty} n^2 w_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-a\right) \neq 0$,
2. jeśli $a = \frac{1}{3}$, to $\lim_{n\to\infty} n^4 w_n = -\frac{1}{180}$.

Następnie Mortici i Chen [6] wyprowadzili następujące bardzo efektywne rozwinięcie asymptotyczne:

$$H_n \sim \gamma + \frac{1}{2}\ln\left(n^2+n+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{180\left(n^2+n+\frac{1}{3}\right)^2} + \\ + \frac{8}{2835\left(n^2+n+\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{5}{1512\left(n^2+n+\frac{1}{3}\right)^4} + O\left(\frac{1}{\left(n^2+n+\frac{1}{3}\right)^5}\right),$$

co na chwilę obecną jest najlepszym znanym rozwinięciem asymptotycznym dla liczb harmonicznych. Śmiało można go porównać do wzoru Stirlinga!

WŁASNOŚCI TEORIO-LICZBOWE LICZB HARMONICZNYCH

Twierdzenie 1. *Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Jeśli $H_{p-1} = \frac{a}{b}$, gdzie $a, b \in \mathbb{N}$ oraz $\mathrm{NWD}(a,b) = 1$, to $p \mid a$.*

Dowód. Korzystając ze wcześniej wyprowadzonych wzorów mamy:

$$H_{p-1} = H_p - \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\binom{p}{k}\frac{1}{k} - \frac{1}{p} = \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{k-1}\binom{p}{k}\frac{1}{k}.$$

Sprowadźmy ułamki do wspólnego mianownika:

$$H_{p-1} = \sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}p!}{k!(p-k)!k} = p\sum_{k=1}^{p-1}\frac{(-1)^{k-1}(p-1)!}{k!(p-k)!k} = \frac{pq}{[(p-1)!]^2},$$

gdzie q jest liczbą naturalną. Ponieważ $\mathrm{NWD}\left(p,[(p-1)!]^2\right) = 1$, więc mamy tezę. □

Fakt ten wiążą się z ogólniejszym twierdzeniem odkrytym już w XIX wieku przez angielskiego matematyka Josepha Wolstenholme'a, które tutaj pominiemy.

MONOTONICZNOŚĆ PEWNEGO CIĄGU

Powróćmy na moment do problemu asymptotyki liczb harmonicznych. Interesuje nas zachowanie analityczne ciągów $\{H_n - \ln(n+c)\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $c > -1$.

Twierdzenie 2. *Ciąg $\{H_n - \ln(n+c)\}_{n=1}^{\infty}$ jest:*

1. *rosnący dla $c > \frac{1}{\sqrt{e}-1} - 1 = 0{,}541494\ldots$,*
2. *malejący dla $-1 < c \leq \frac{1}{2}$.*

Dowód. Wykorzystamy bez dowodu fakt, że funkcja:

$$\phi(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x+1}}-1} - x$$

jest malejąca w półosi $[1,\infty)$. Mamy:

$$[H_n - \ln(n+c)] - [H_{n+1} - \ln(n+1+c)] = \ln\left(1+\frac{1}{n+c}\right) - \frac{1}{n+1} < 0$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$c > \frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}-1} - n,$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, co jest równoważne z warunkiem:

$$c > \phi(1) = \frac{1}{\sqrt{e}-1} - 1.$$

Analogicznie, podpunkt drugi twierdzenia jest równoważny warunkowi:

$$c < \frac{1}{e^{\frac{1}{n+1}}-1} - n$$

spełnionemu dla każdego $n \in \mathbb{N}$, czyli $c \leq \lim_{x\to\infty}\phi(x) = \frac{1}{2}$, co kończy dowód twierdzenia. □

Dwa problemy. *Co dzieje się gdy $\frac{1}{2} < c \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} - 1$? Jak wygląda monotoniczność ciągów Morticiego $w_n = H_n - \gamma + \frac{1}{2}\ln\left(n^2+n+a\right)$, gdy $a > -2$.*

UOGÓLNIENIE DEFINICJI LICZB HARMONICZNYCH

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem uogólnienia liczb harmonicznych na indeksy rzeczywiste korzystając z całki Eulera:

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

Przypomnijmy, że podejście to jest zgodne z podejściem Eulera do uogólnienia funkcji silnia na argumenty rzeczywiste (a nawet zespolone) – zob. [7].

CAŁKA WEYLA [4]

Jedna z możliwych definicji pochodnej rzędu niecałkowitego oparta jest na całce Weyla, danej wzorem:

$$W^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}(\xi-x)^{\alpha-1}f(\xi)\mathrm{d}\xi,\ \alpha > 0,\ x > 0.$$

Ponadto przyjmujemy $W^0 f(x) := f(x)$. Jeśli $f(x) = O(x^{-\beta})$ dla dostatecznie dużych x, to całka ta jest zbieżna dla $0 < \alpha < \beta$. Przy założeniu istnienia odpowiednich całek, zachodzą równości:

$$W^{-\alpha}\left(W^{-\beta}f(x)\right) = W^{-\beta}\left(W^{-\alpha}f(x)\right),\ \alpha,\beta > 0,$$
$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(W^{-\alpha}f(x)\right) = W^{-\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x}\right),\ \alpha > 0, n \in \mathbb{N},$$
$$E^n\left(W^{-\alpha}f(x)\right) = W^{-\alpha}(E^n f(x)),\ \alpha > 0, n \in \mathbb{N},$$

gdzie $Ef(x) = -\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

Definicja 1. *Niech f będzie funkcją całkowalną na dowolnym przedziale $I \subset [0,\infty)$ oraz $f(x) = O(x^{-\beta})$ dla pewnego $\beta > 0$. Wtedy dla każdego $\alpha > -\beta$ istnieje pochodna ułamkowa Weyla funkcji $f(x)$ rzędu α oraz:*

$$\mathrm{d}W^{\alpha}f(x) = \begin{cases} W^{\alpha}f(x), & \alpha < 0, \\ f(x), & \alpha = 0, \\ W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}\left(E^{\lceil\alpha\rceil}f(x)\right), & \alpha > 0. \end{cases}$$

Przykład 1.

$$W^{-\alpha}e^{-px} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}(\xi-x)^{\alpha-1}e^{-p\xi}\mathrm{d}\xi = \left[\begin{array}{c}\xi-x=u\\ \mathrm{d}\xi=\mathrm{d}u\end{array}\right] = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}e^{-px}\int_0^{\infty}u^{\alpha-1}e^{-pu}\mathrm{d}u = p^{-\alpha}e^{-px}$$

dla $\alpha > 0$, $p > 0$. Stąd mamy:

$$\mathrm{d}W^{\alpha}e^{-px} = W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}\left(E^{\lceil\alpha\rceil}e^{-px}\right) = W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}(p^{\lceil\alpha\rceil}e^{-px}) = p^{\alpha}e^{-px}$$

dla $\alpha > 0$.

Przykład 2.

$$W^{-\alpha}\left(\frac{1}{x^p}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\xi^p}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{(1-\frac{x}{\xi})^{\alpha-1}}{\xi^{p-\alpha+1}}\mathrm{d}\xi = \\ = \left[\begin{array}{c}\frac{x}{\xi}=u\\ \frac{x}{\xi^2}\mathrm{d}\xi=-\mathrm{d}u\end{array}\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{x^{p-\alpha}}\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u^{p-\alpha-1}\mathrm{d}u = \\ = \frac{B(\alpha,p-\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{1}{x^{p-\alpha}} = \frac{\Gamma(p-\alpha)}{\Gamma(p)}\cdot\frac{1}{x^{p-\alpha}}$$

dla $p > \alpha > 0$, $B(\cdot,\cdot)$ oznacza tutaj funkcję beta. Zatem mamy:

$$\mathrm{d}W^{\alpha}\left(\frac{1}{x^p}\right) = W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}\left(E^{\lceil\alpha\rceil}\left(\frac{1}{x^p}\right)\right) = \\ = W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}\left(\frac{\Gamma(p+\lceil\alpha\rceil)}{\Gamma(p)}\cdot\frac{1}{x^{p+\lceil\alpha\rceil}}\right) = \frac{\Gamma(p+\alpha)}{\Gamma(p)}\cdot\frac{1}{x^{p+\alpha}}$$

dla $\alpha > 0$, $p > 0$.

FUNKCJE POLIGAMMA I ICH MODYFIKACJA

Definicja 2. *Funkcję poligamma rzędu m definiujemy jako pochodną logarytmiczną rzędu $m+1$ z funkcji gamma:*

$$\psi^{(0)}(x) := \psi(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\Gamma(x), \qquad \psi^{(m)}(x) := \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\psi(x), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Funkcje te spełniają zależność rekurencyjną:

$$\psi^{(m)}(x+1) = \psi^{(m)}(x) + \frac{(-1)^m m!}{x^{m+1}},$$

z której to zależności możemy otrzymać równość (4) – jest to przypadek szczególny ogólniejszej zależności (3). Funkcje te dla $x > 0$ posiadają również reprezentację całkową:

$$\psi(x) = \int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{xt}}{1-e^{-t}}\right)\mathrm{d}t, \qquad \psi^{(m)}(x) = (-1)^{m+1}\int_0^{\infty}\frac{t^m e^{-xt}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t$$

oraz w postaci szeregu:

$$\psi(x+1) = -\gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n(n+x)},$$
$$\psi^{(m)}(x) = (-1)^{m+1}m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^{m+1}}.$$

Zdefiniujmy zmodyfikowaną funkcję poligamma.

Definicja 3.

$$\psi_*^{(0)}(x) := \psi(x), \qquad \psi_*^{(\alpha)}(x) := \mathrm{d}W^{\alpha}\left(\psi(x)\right), \quad \alpha > 0.$$

Uwaga 1. *Całka Weyla z funkcji $\psi(x)$ jest rozbieżna, natomiast dla dowolnego: $\alpha \in (0,1)$, $m \in \mathbb{N}$ całka $W^{-a}\left(\psi^{(m)}(x)\right)$ jest zbieżna, tym samym funkcja:*

$$\psi_*^{(\alpha)}(x) = \mathrm{d}W^{\alpha}\left(\psi(x)\right) = W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}\left(E^{\lceil\alpha\rceil}\psi(x)\right) = (-1)^{\lceil\alpha\rceil}W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}\left(\psi^{(\lceil\alpha\rceil)}(x)\right)$$

jest poprawnie określona!

Korzystając z powyższej definicji możemy wyprowadzić zależność rekurencyjną:

$$\psi_*^{(\alpha)}(x+1) = \mathrm{d}W^{\alpha}\left(\psi(x+1)\right) = \mathrm{d}W^{\alpha}\left(\psi(x)+\frac{1}{x}\right) = \\ = \mathrm{d}W^{\alpha}\left(\psi(x)\right) + \mathrm{d}W^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right) = \psi_*^{(\alpha)}(x) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{x^{\alpha+1}}. \tag{2}$$

Reprezentacja całkowa funkcji $\psi_*^{(\alpha)}$. Niech $m \in \mathbb{N}$, wtedy:

$$\psi_*^{(m)}(x) = E^m\psi(x) = (-1)^m\psi^{(m)}(x) = -\int_0^{\infty}\frac{t^m e^{-xt}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t,$$

$$\psi_*^{(\alpha)}(x) = W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}\left(E^{\lceil\alpha\rceil}\psi(x)\right) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\int_x^{\infty}(\xi-x)^{\lceil\alpha\rceil-\alpha-1}\left(-\int_0^{\infty}\frac{t^{\lceil\alpha\rceil}e^{-\xi t}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi = \\ = \frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\int_0^{\infty}\left(\int_x^{\infty}(\xi-x)^{\lceil\alpha\rceil-\alpha-1}e^{-\xi t}\frac{t^{\lceil\alpha\rceil}}{1-e^{-t}}d\xi\right)\mathrm{d}t = \\ = -\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\int_x^{\infty}(\xi-x)^{\lceil\alpha\rceil-\alpha-1}e^{-xit}\mathrm{d}\xi\right)\frac{t^{\lceil\alpha\rceil}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t = \\ = -\int_0^{\infty}\frac{t^{\alpha}e^{-xt}}{1-e^{-t}}\mathrm{d}t, \quad \alpha > 0.$$

Reprezentacja w postaci szeregu:

$$\psi_*^{(m)}(x) = E^m\psi(x) = (-1)^m\psi^{(m)}(x) = -m!\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\psi_*^{(\alpha)}(x) = W^{\alpha-\lceil\alpha\rceil}\left(E^{\lceil\alpha\rceil}\right) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\int_x^{\infty}(\xi-x)^{\lceil\alpha\rceil-\alpha-1}\left(-\Gamma(\lceil\alpha\rceil+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(\xi+n)^{\lceil\alpha\rceil+1}}\right)\mathrm{d}\xi = \\ = -\Gamma(\lceil\alpha\rceil+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}\int_x^{\infty}\frac{(\xi-x)^{\lceil\alpha\rceil-\alpha-1}}{(\xi+n)^{\lceil\alpha\rceil+1}}\mathrm{d}\xi = \\ = -\Gamma(\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0.$$

Z tego rezultatu otrzymujemy również:

$$\psi_*^{(\alpha)}(1) = -\Gamma(\alpha+1)\zeta(\alpha+1) \quad \text{dla } \alpha > 0.$$

LICZBY HARMONICZNE RZĘDU r

Z zależności (2) otrzymujemy następujący związek:

$$\psi_*^{(\alpha)}(k+1) - \psi_*^{(\alpha)}(k) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k^{\alpha+1}}$$

skąd:

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^r} = \frac{1}{\Gamma(r)}\left(\psi_*^{(r-1)}(n+1) - \psi_*^{(r-1)}(1)\right), \quad r > 1, \tag{3}$$

w szczególności gdy $r \in \mathbb{N}$, to mamy wzór:

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^r} = \frac{(-1)^{r-1}}{(r-1)!}\left(\psi^{(r-1)}(n+1) - \psi^{(r-1)}(1)\right). \tag{4}$$

Wzór (3) może być traktowany jako uogólnienie wzoru (4) dla $r > 1$. Przedstawimy kilka wybranych tożsamości dla liczb harmonicznych opisanych wzorem (3):

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k^{(a)}}{k^b} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_*^{(a-1)}(k+1) - \psi_*^{(a-1)}(1)}{\Gamma(a)k^b} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_*^{(a-1)}(k+1)}{\Gamma(a)k^b}\right) + \zeta(a)H_n^{(b)}$$

dla dowolnych $a, b > 1$. Stąd:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(a)}}{k^b} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_*^{(a-1)}(k+1)}{\Gamma(a)k^b}\right) + \zeta(a)\zeta(b) = \zeta(a)\zeta(b) - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(k+j+1)^a k^b}.$$

Tożsamość rekurencyjna:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p(n+a)^q} = \frac{1}{a}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p(n+a)^{q-1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-1}(n+a)^q}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+a)^p} = -\frac{\psi_*^{(p-1)}(a+1)}{\Gamma(p)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+a)} = \frac{1}{a}\left(\psi(a+1)+\gamma\right)$$

dla $p, q \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{-1,-2,-3,\ldots\}$.

LITERATURA

[1] Barbero S., Cerruti U., Muru N.: Transforming recurrent sequences by using the binomial and invert operators. J. Integer Seq. Vol. 13 (2010), Article 10.7.7.

[2] Borwein, J.M., Bradley, D.M.: Thirty-two Goldbach variations. International Journal of Number Theory 2, 65-103 (2006).

[3] Dil A., Kurt V.: Polynomials related to harmonic numbers and evaluation of harmonic number series II. Appl. Anal. Discrete Math. 5, 212-229 (2011).

[4] Hetmaniok E., Lorenc P., Pleszczyński M., Różański M., Szweda M., Wituła R.: Harmonic numbers of any order and the Wolstenholme's-type relations for harmonic numbers. Artykuł w monografii: Theory and applications of non-integer order systems. 8th Conference on Non-integer Order Calculus and Its Applications, Zakopane, Poland. Eds. A. Babiarz, A. Czornik, J. Klamka, M. Niezabitowski. Springer (2017), 33-44.

[5] Mortici C.: New improvements of the Stirling formula. Appl. Math. Comput. 217 (2010), 699-704.

[6] Mortici C., Chen C.-P.: On the harmonic number expansion by Ramanujan. J. Inequal. Appl. 2013 (2013), 222.

[7] Rabsztyn S., Słota D., Wituła R.: Funkcje gamma i beta. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.

[8] Sofo A., Srivastava H.M.: A family of shifted harmonic sums. Ramanujan Journal 37, 89-108 (2015).

[9] Sofo A., Cvijovic D.: Extensions of Euler Harmonic Sums. Appl. Anal. Discrete Math. 6, 317-328 (2012).

[10] Sofo A.: Shifted harmonic sums of order two. Commun. Korean Math. Soc. 29, 239-255 (2014).

[11] Sofo A.: Summation formula involving harmonic numbers. Anal. Math. 37, 51-64 (2011).

[12] Zheng D.Y.: Further summation formulae related to generalized harmonic numbers. J. Math. Anal. Appl. 335, 692-706 (2007).