

**EGZAMIN LICENCJACKI
NA KIERUNKU MATEMATYKA
ROK AKADEMICKI 2019/2020**

1. WSTĘP DO LOGIKI I TEORII MNOGOŚCI

1. Omów zdania i spójniki logiczne. Czym są tautologie w rachunku zdań i jak je weryfikujemy?
2. Omów funkcje zdaniowe i kwantyfikatory. Sformułuj pojęcie prawa rachunku kwantyfikatorów.
3. Podaj definicje, przykłady oraz własności następujących pojęć: iniekcja, surjekcja na dany zbiór oraz bijekcja na dany zbiór.
4. Omów podstawowe działania na zbiorach oraz ich własności. Zdefiniuj i zilustruj na wybranych przykładach pojęcia sum i iloczynów uogólnionych.
5. Podaj definicję relacji równoważności. Omów oraz zilustruj na przykładzie pojęcie klasy abstrakcji względem danej relacji równoważności.
6. Omów pojęcie równoliczności zbiorów. Podaj definicje oraz przykłady zbiorów przeliczalnych oraz nieprzeliczalnych.
7. Sformułuj twierdzenie Cantora-Bernsteina. Podaj wybrane przykłady zastosowania tego twierdzenia.
8. Podaj definicję relacji częściowego porządku. Sformułuj lemat Kuratowskiego-Zorna.
9. Sformułuj zasadę indukcji matematycznej (inaczej: twierdzenie o indukcji matematycznej). Posługując się tym twierdzeniem udowodnij, że zbiór liczb pierwszych jest nieskończony.

2. ANALIZA MATEMATYCZNA

1. Podaj definicję granicy ciągu liczbowego i omów najważniejsze twierdzenia dotyczące granic.
2. Omów zależności między zbieżnością, ograniczonością i monotonicznością ciągu.
3. Podaj najważniejsze kryteria dotyczące zbieżności szeregów liczbowych.
4. Podaj definicję funkcji oraz najważniejsze własności z nią związane.
5. Omów definicję granicy funkcji w sensie Cauchy'ego i Heinego.
6. Omów pojęcia funkcji ciągłej i jednostajnie ciągłej określonej w przedziale; wskaż odpowiednie przykłady.
7. Omów najważniejsze twierdzenia dotyczące funkcji ciągłych.
8. Zdefiniuj pochodną funkcji w punkcie; omów zależności między ciągłością i różniczkowalnością.
9. Podaj klasyczne twierdzenia rachunku różniczkowego i omów ich wzajemne zależności.
10. Omów zastosowania pochodnych w badaniu zmienności funkcji.
11. Zdefiniuj pojęcie całki nieoznaczonej oraz omów najważniejsze metody całkowania.
12. Omów definicję całki oznaczonej w sensie Riemanna; podaj przykłady funkcji całkowalnych i niecałkowalnych.
13. Podaj najważniejsze warunki konieczne i dostateczne całkowalności funkcji w sensie Riemanna.
14. Sformułuj zasadnicze twierdzenie rachunku całkowego oraz najważniejsze wnioski.
15. Omów najważniejsze zastosowania geometryczne całki oznaczonej.
16. Omów definicje całek niewłaściwych oraz sformułuj kryterium całkowe Maclaurina zbieżności szeregów.
17. Omów pojęcia zbieżności punktowej i jednostajnej ciągu i szeregu funkcyjnego.
18. Omów pojęcie przestrzeni metrycznej oraz najważniejsze pojęcia topologiczne dotyczące tej przestrzeni; wskaż odpowiednie przykłady.
19. Zdefiniuj ciągłość, pochodne cząstkowe oraz różniczkowalność funkcji wielu zmiennych; omów wzajemne zależności.
20. Podaj twierdzenia (warunek konieczny i warunek dostateczny) związane ze znajdowaniem ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych.

21. Omów metodę znajdowania ekstremów globalnych funkcji dwóch zmiennych w obszarze zwartym.
22. Omów definicję całki oznaczonej funkcji dwóch zmiennych w prostokącie oraz podaj twierdzenie o zamianie tej całki na całki iterowane.
23. Omów współrzędne biegunowe oraz ich zastosowanie do obliczania całek podwójnych; wskaż odpowiednie przykłady.
24. Omów przykłady zastosowań geometrycznych i fizycznych całki podwójnej i potrójnej.
25. Zdefiniuj całkę krzywoliniową nieskierowaną oraz wskaż jej zastosowania fizyczne.
26. Podaj twierdzenie Greena o zamianie całki krzywoliniowej skierowanej na całkę podwójną.
27. Omów wybrane przykłady zastosowań całki powierzchniowej niezorientowanej.
28. Podaj twierdzenia Gaussa i Stokesa związane z całką powierzchniową zorientowaną.
29. Zdefiniuj trygonometryczny szereg Fouriera; przedstaw wybrany przykład rozwinięcia funkcji w ten szereg.
30. Omów metody znajdowania całek ogólnych i szczególnych najprostszych typów równań różniczkowych.

3. ALGEBRA

1. Podaj definicje działań modulo n . Omów algebraiczne własności tych działań.
2. Omów algorytm Euklidesa i jego zastosowania.
3. Sformułuj Małe Twierdzenie Fermata i twierdzenie Eulera.
4. Sformułuj Chińskie Twierdzenie o Resztach.
5. Podaj definicję permutacji, omów metody zapisu permutacji i działania na permutacjach.
6. Podaj definicję grupy, podgrupy i przykłady grup abelowych i nieabelowych.
7. Sformułuj twierdzenie Lagrange'a o podgrupach grup skończonych. Zilustruj to twierdzenie odpowiednimi przykładami.
8. Podaj definicję pierścienia, podpierścienia i przykłady pierścieni przemiennych i nieprzemiennych.
9. Podaj definicję ciała i przykłady ciał, w tym przykłady ciał skończonych.
10. Podaj definicję wielomianu. Omów działania na wielomianach i ich własności.
11. Podaj definicję pierwiastka wielomianu oraz sformułuj twierdzenie Bézouta i twierdzenie o pierwiastkach wielokrotnych.
12. Podaj definicję wielomianu nierozkładalnego i sformułuj twierdzenie o rozkładzie wielomianów. Omów nierozkładalność wielomianów w ciałach \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} .

4. GEOMETRIA

1. Omów różne rodzaje geometrii. Podaj dowolny model dowolnie wybranej geometrii nieuklidesowej.
2. Podaj definicję izometrii oraz klasyfikację izometrii płaszczyzny.
3. Omów zapis izometrii w przestrzeni \mathbb{R}^2 jako przekształceń afinicznych oraz metodę rozpoznawania rodzaju izometrii zapisanej przy pomocy afinicznego wzoru.
4. Podaj definicję krzywych stożkowych oraz omów klasyfikację tych krzywych.
5. Omów klasyfikację powierzchni stopnia drugiego.
6. Podaj definicję iloczynu skalarnego i omów macierzowy opis iloczynów skalarnych w przestrzeni liniowej skończonej wymiarowej.
7. Sformułuj twierdzenie Cauchy-Buniakowskiego-Schwartza.
8. Omów metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta.
9. Podaj definicje macierzy symetrycznej, hermitowskiej, ortogonalnej, unitarnej oraz ich zastosowania w geometrii.
10. Podaj definicję przestrzeni metrycznej, topologicznej i przykłady.
11. Podaj definicję trójnogu Freneta oraz krzywizny i torsji krzywej w przestrzeni \mathbb{R}^3 .

5. ALGEBRA LINIOWA I GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. Podaj definicję i sposoby zapisu liczb zespolonych.
2. Podaj zastosowania zapisu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej.
3. Podaj definicje działań i ich podstawowe własności w pierścieniu macierzy kwadratowych ustalonego wymiaru nad dowolnym ciałem.
4. Przedstaw metody rozwiązywania liniowych układów równań.
5. Podaj różne definicje wyznacznika. Podaj przykładowe własności i zastosowania wyznacznika.
6. Podaj definicję i przykłady przestrzeni i podprzestrzeni liniowych.
7. Podaj definicję bazy i wymiaru przestrzeni liniowej. Przedstaw wybraną metodę wyznaczania bazy skończenie wymiarowej.
8. Podaj metodę konstrukcji reprezentacji macierzowej przekształcenia liniowego w przestrzeniach skończenie wymiarowych.
9. Podaj definicję przekształcenia liniowego oraz jądra i obrazu przekształcenia liniowego. Omów wybrany przykład.
10. Podaj definicję wartości własnych i wektorów własnych operatora liniowego. Omów wybrany przykład.
11. Podaj definicję macierzy Jordana i omów metodę znajdowania macierzy w postaci Jordana dla operatorów liniowych w przestrzeniach skończenie wymiarowych.

6. RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

1. Podaj i wyjaśnij wzór na prawdopodobieństwo całkowite oraz wzór Bayesa.
2. Podaj aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa oraz definicję przestrzeni probabilistycznej.
3. Podaj definicję zmiennej losowej typu dyskretnego oraz przykład takiej zmiennej.
4. Podaj definicję zmiennej losowej typu ciągłego oraz przykład takiej zmiennej. Omów pojęcie gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej typu ciągłego.
5. Zdefiniuj dystrybuantę zmiennej losowej. Jakie warunki powinna spełniać funkcja, aby mogła być dystrybuantą zmiennej losowej?
6. Scharakteryzuj jednowymiarowy normalny rozkład prawdopodobieństwa.
7. Podaj definicję dystrybuanty łącznej dwuwymiarowej zmiennej losowej oraz dystrybuant brzegowych.
8. Podaj definicję dystrybuanty warunkowej i gęstości warunkowej zmiennej losowej.
9. Zdefiniuj wartość oczekiwaną zmiennej losowej typu ciągłego i dyskretnego. Omów podstawowe własności wartości oczekiwanej.
10. Zdefiniuj pojęcia zbieżności z prawdopodobieństwem 1 oraz zbieżności według prawdopodobieństwa dla ciągów zmiennych losowych. Jaki jest związek pomiędzy tymi zbieżnościami ?
11. Sformułuj i omów słabe i mocne prawo wielkich liczb.
12. Podaj treść centralnego twierdzenia granicznego Lindeberga-Levy'ego dla niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach oraz przykład jego praktycznego zastosowania.
13. Zdefiniuj funkcję charakterystyczną zmiennej losowej i omów jej podstawowe własności.
14. Zdefiniuj funkcję tworzącą zmiennej losowej typu dyskretnego i omów jej podstawowe własności.

7. WSTĘP DO STATYSTYKI

1. Omów miary przeciętne (średnie) służące do opisu zbiorowości statystycznej: kwartyle oraz dominantę (modę).
2. Omów miary zróżnicowania (rozproszenia) służące do opisu zbiorowości statystycznej: wariancję, odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności.
3. Zdefiniuj pojęcia nieobciążoności oraz zgodności estymatora.
4. Omów metodę największej wiarygodności wyznaczania estymatorów.
5. Podaj postać nierówności Rao-Cramera i wyjaśnij jej sens.
6. Na wybranym przykładzie omów pojęcie przedziału ufności.
7. Wyjaśnij znaczenie integralnych elementów testu statystycznego, takich jak hipoteza zerowa, hipoteza alternatywna, statystyka testowa oraz zbiór krytyczny.
8. Zdefiniuj błąd pierwszego i drugiego rodzaju w teście statystycznym. Podaj definicję mocy testu.
9. Na wybranym przykładzie omów dowolny parametryczny test istotności.
10. Scharakteryzuj nieparametryczne testy zgodności rozkładu: test chi-kwadrat Pearsona oraz test Kołmogorowa.
11. Zdefiniuj współczynnik korelacji liniowej Pearsona dla dwuwymiarowej próby losowej i omów jego najważniejsze własności.
12. Omów metodę najmniejszych kwadratów (MNK) oraz jej zastosowanie do wyznaczenia współczynników prostej regresji cechy Y względem cechy X na podstawie próby losowej tych cech.

8. METODY NUMERYCZNE

1. Omów wybraną metodę przybliżonego rozwiązywania równań nieliniowych.
2. Sformułuj zagadnienie interpolacji oraz omów interpolację Lagrange'a.
3. Na czym polega zagadnienie aproksymacji? Omów aproksymację średniokwadratową.
4. Omów kwadratury Newtona-Cotesa.
5. Omów wybraną jednokrokową metodę przybliżonego rozwiązywania zagadnień początkowych.

9. PRZEDMIOTY INFORMATYCZNO-TECHNICZNE

1. Omów koncepcję bufora w informatyce. Gdzie i do czego jest wykorzystywany?
2. Przedstaw koncepcję budowy funkcji w programowaniu. Jak powinna wyglądać struktura funkcji w informatyce i co należy określić, aby ją zdefiniować?
3. Przedstaw metody interakcji człowiek-maszyna: jakie funkcje są używane, jakie są ich argumenty wejściowe, co zwracają?
4. Przedstaw zasadę budowania pętli na przykładzie tworzenia ciągu arytmetycznego i wyznaczania jego sumy.
5. Przedstaw koncepcję multiwarunku. Jaką powinien mieć strukturę aby kompilator się „nie pomylił”?
6. Co to jest operacja rekurencji i jak działa? Przedstaw i omów przykład jej zastosowania.
7. Przedstaw, na wybranym przykładzie (np. algorytmu poszukiwania maximum w ciągu liczbowym), zasady budowania schematów blokowych dla algorytmów.
8. Przedstaw jak działa algorytm szyfru Cezara na wybranym przykładzie zdania twierdzącego.
9. Posortuj algorytmem „przez wstawianie” i algorytmem „bąbelkowym” ciąg liczb 1,2,4,5,6,8,3 oraz omów różnice między tymi algorytmami.
10. Omów algorytm genetyczny i porównaj go z algorytmem kukułki.
11. Omów sposoby zapisu koloru w programach komputerowych i ich zastosowania.
12. Omów elementy składowe typowego komputera.
13. Jak w \LaTeX u zapisać macierz lub tabelę? Omów różne komendy i ich opcje.
14. Jak utworzyć prostą stronę internetową? Omów kilka elementów takiej strony.
15. Omów matematyczny model Lotki-Volterra.
16. Przedstaw stacjonarny i niestacjonarny model przepływu ciepła.
17. Omów model matematyczny oscylatora harmonicznego.