EGZAMIN MAGISTERSKI
NA KIERUNKU MATEMATYKA
ROK AKADEMICKI 2019/2020

1. Logika i podstawy matematyki

1. Omów aksjomaty klasycznego rachunku zdań i reguły dowodzenia. Sformułuj twierdzenie o dedukcji. Zdefiniuj wszystkie terminy występujące w sformułowaniu.

2. Sformułuj twierdzenie o zupełności dla klasycznego rachunku zdań. Zdefiniuj wszystkie terminy występujące w sformułowaniu.

3. Omów logikę predykatów 1-go rzędu. Zdefiniuj termy i formuły języka L, formułę spełnioną w strukturze, tautologie. Podaj odpowiednie przykłady.

4. Podaj aksjomaty logiki predykatów 1-go rzędu i reguły dowodzenia. Podaj definicję dowodu formuły i sformułuj twierdzenie o dedukcji.

5. Sformułuj twierdzenie o zupełności dla logiki predykatów 1-go rzędu . Zdefiniuj wszystkie terminy występujące w sformułowaniu.

6. Omów maszyny Turinga, funkcje obliczalne i funkcje rekurencyjne. Przedstaw Tezę Churcha.

7. Omów zbiory rekurencyjne i rekurencyjnie przeliczalne oraz związki pomiędzy tymi pojęciami. Omów uniwersalne funkcje rekurencyjne i podaj przykłady zbiorów nierekurencyjnych.

8. Omów arytmetykę Peano. Sformułuj twierdzenie Gödla o niezupełności.

9. Omów aksjomatyzację teorii mnogości. Przedstaw aksjomat wyboru.

10. Omów zbiory uporządkowane, zbiory dobrze uporządkowane i zasadę indukcji pozaskończonej. Podaj przykłady zastosowań tej zasady.

2. Algebra z zastosowaniami

1. Omów kody blokowe, kodowania umożliwiające wykrywanie/korygowanie błędów. Podaj podstawowe własności takich kodowań oraz przykłady.

2. Omów kodowanie grupowe, kodowanie macierzowe, macierz kontroli parzystości. Przedstaw ich podstawowe własności i przykłady.

3. Omów kody wielomianowe, ich podstawowe własności i przykłady.

4. Podaj definicję i podstawowe własności kodów doskonałych. Podaj definicję kodów Hamminga.

5. Omów ciała skończone ze szczególnym uwzględnieniem grupy multyplikatywnej ciała i ilości elementów. Podaj postać wielomianów minimalnych nad podciałem prostym.

6. Omów kody BCH, ich podstawowe własności i przykłady.

7. Omów maszyny Turinga i obliczalność, czas pracy, przestrzeń pracy, maszyny wielotaśmowe i symulację takich maszyn.

8. Omów złożoność obliczeniową, klasy P i PSPACE. Podaj przykłady.

9. Omów maszyny niedeterministyczne, klasę NP, własności języków klasy NP, języki NP-zupełne. Podaj przykłady.

10. Omów funkcje 1-kierunkowe, problem faktoryzacji, protokół RSA.

3. Topologia

1. Podaj definicje przestrzeni metrycznej oraz kuli otwartej, zbioru otwartego i zbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej.

2. Podaj definicję przestrzeni topologicznej oraz zbioru otwartego i zbioru domkniętego w przestrzeni topologicznej.

3. Podaj definicje i własności operacji wnętrza i domknięcia zbiorów w przestrzeni topologicznej. Podaj przykłady.

4. Sformułuj definicje zbieżności ciągu w przestrzeni topologicznej i w przestrzeni metrycznej. Jaką moc może mieć zbiór granic ciągu w przestrzeni topologicznej i w przestrzeni metrycznej?

5. Podaj definicje i przykłady zbioru gęstego i zbioru brzegowego w przestrzeni topologicznej.

6. Sformułuj definicję bazy przestrzeni topologicznej. Podaj przykład przestrzeni topologicznej i jej bazy, która ma mniejszą moc niż moc całej topologii.

7. Podaj definicję i wymień podstawowe własności przestrzeni Hausdorffa.

8. Zdefiniuj przestrzeń ośrodkową i omów jej podstawowe własności. Podaj przykłady przestrzeni ośrodkowych i nieośrodkowych.

9. Podaj definicję przekształcenia ciągłego przestrzeni topologicznych. Wymień kilka własności dziedziny i zbioru wartości zachowywanych przez przekształcenia ciągłe.

10. Podaj definicję homeomorfizmu. Wymień kilka niezmienników homeomorfizmów (tzn. własności przestrzeni, które są zachowywane przez homeomorfizmy).

11. Podaj definicję i wymień kilka własności zwartej przestrzeni topologicznej. Podaj przykłady przestrzeni zwartych i niezwartych.

12. Omów zwartość przestrzeni metrycznej. Podaj przykłady przestrzeni metrycznych zwartych i niezwartych.

4. Analiza matematyczna I

1. Przedstaw definicję całki krzywoliniowej niezorientowanej (całki krzywoliniowej pierwszego rodzaju). Podaj przykłady zastosowania tej całki.

2. Przedstaw definicję całki krzywoliniowej zorientowanej (całki krzywoliniowej drugiego rodzaju). Omów własności tej całki.

3. Podaj wzór Greena dla całki krzywoliniowej zorientowanej $\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$, gdzie L oznacza brzeg obszaru D. Omów zastosowania tego wzoru.

4. Podaj definicję oraz omów własności i przykładowe zastosowania całki powierzchniowej niezorientowanej (całki powierzchniowej pierwszego rodzaju).

5. Podaj definicję całki powierzchniowej zorientowanej (całki powierzchniowej drugiego rodzaju). Zdefiniuj strumień pola wektorowego $\vec{F} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$ przez powierzchnię S.

6. Przedstaw twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego o związku między całką powierzchniową po zamkniętej powierzchni a całką potrójną po obszarze ograniczonym tą powierzchnią.

7. Zdefiniuj rotację pola wektorowego $\vec{F} = \{P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\}$. Kiedy takie pole będzie polem potencjalnym? Jak znaleźć ten potencjał?

8. Zdefiniuj gradient pola skalarnego $U = U(x,y,z)$ klasy C^1. Omów związek gradientu pola U z pochodną kierunkową funkcji U. Ile wynosi rotacja gradientu U ?

9. Przedstaw twierdzenie Stokesa o związku pomiędzy całką krzywoliniową zorientowaną a całką powierzchniową.

10. Omów liczby zespolone i działania na nich. Przedstaw postać trygonometryczną liczby zespolonej. Podaj definicję potęgi liczby zespolonej. Oblicz i^i.

11. Omów symetrię liczb zespolonych względem okręgu. Zdefiniuj okręgi Apoloniusza.

12. Podaj określenie szeregu potęgowego i zdefiniuj obszar jego zbieżności. Przedstaw definicje funkcji e^z, $\sin z$, $\cos z$ i związek pomiędzy nimi (wzór Eulera).

13. Zdefiniuj pojęcie funkcji analitycznej (inaczej holomorficznej) w obszarze G. Podaj odpowiednie równania (warunki) Cauchy'ego-Riemanna.

14. Omów najprostsze odwzorowanie konforemne, takie jak odwzorowanie liniowe, inwersja i jej uogólnienie, homografia.

15. Podaj definicję indeksu punktu względem krzywej i omów to pojęcie.

16. Przedstaw twierdzenie całkowe Cauchy'ego oraz wzór całkowy Cauchy'ego.

17. Omów szeregi Laurenta, punkty osobliwe oraz residua funkcji meromorficznej.

5. Analiza matematyczna II

1. Omów twierdzenie całkowe Cauchy'ego.

2. Podaj wzór całkowy Cauchy'ego.

3. Omów zasadę maksimum (lemat Schwarza) modułu funkcji analitycznej.

4. Omów szeregi Laurenta, ich obszary zbieżności i własności.

5. Przedstaw twierdzenie o residuach.

6. Podaj definicję i własności transformacji Laplace'a. Omów twierdzenie Borela o transformacie Laplace'a splotu oryginałów.

7. Omów zastosowanie przekształcenia Laplace'a do znajdowania rozwiązań równań różniczkowych liniowych i układów równań o stałych współczynnikach.

8. Podaj definicję i własności funkcji o wariacji skończonej. Omów twierdzenie Jordana.

9. Podaj definicję zbiorów miary Lebesgue'a zero w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Uzasadnij, że tworzą one ideał podzbiorów w $\mathbb{R}^n$.

10. Omów pojęcie miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.

11. Podaj definicję i omów własności funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$.

6. Analiza funkcjonalna

1. Sformułuj definicje przestrzeni unormowanej i przestrzeni Banacha. Podaj przykłady takich przestrzeni.

2. Sformułuj twierdzenie o równoważności norm w przestrzeniach skończenie wymiarowych.

3. Podaj nierówności Höldera i Minkowskiego.

4. Podaj definicję i przykłady operatorów liniowych ciągłych na przestrzeniach unormowanych. Wymień warunki równoważne ciągłości operatora liniowego.

5. Sformułuj twierdzenie Banacha-Steinhausa.

6. Sformułuj twierdzenia Banacha o operatorze otwartym, o operatorze odwrotnym oraz o domkniętym wykresie.

7. Sformułuj twierdzenie Hahna-Banacha.

8. Podaj definicję normy w przestrzeni unitarnej, nierówność Schwartza dla iloczynu skalarnego, prawo równoległoboku.

9. Podaj definicję rzutu ortogonalnego w przestrzeniach Hilberta i jego własności.

10. Sformułuj twierdzenie o postaci funkcjonału liniowego i ciągłego na przestrzeni Hilberta.

11. Sformułuj definicję układu ortogonalnego i ortonormalnego w przestrzeni unitarnej. Podaj przykłady układów ortogonalnych w różnych przestrzeniach unitarnych.

12. Podaj definicję współczynników Fouriera względem układu ortogonalnego, własność minimum dla współczynników Fouriera i nierówność Bessela dla układów ortogonalnych.

7. Równania różniczkowe zwyczajne i cząstkowe

1. Zdefiniuj zadanie Cauchy'ego dla równań różniczkowych zwyczajnych. Przedstaw warunki istnienia jednego rozwiązania zadania Cauchy'ego. Omów metodę kolejnych przybliżeń rozwiązywania tego zadania.

2. Omów metodę szukania rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych przy pomocy szeregów potęgowych.

3. Omów równanie różniczkowe zwyczajne o rozdzielonych zmiennych oraz równanie różniczkowe zwyczajne jednorodne.

4. Omów równanie różniczkowe zwyczajne liniowe rzędu pierwszego jednorodne i niejednorodne. Przedstaw metodę uzmienniania stałej.

5. Omów równanie różniczkowe zwyczajne liniowe rzędu n o stałych współczynnikach, jednorodne i niejednorodne. Przedstaw metodę uzmienniania stałych.

6. Omów równania różniczkowe Eulera . Znajdź rozwiązania równania $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{4}y = 0$.

7. Zdefiniuj wyznacznik Wrońskiego dla równania różniczkowego liniowego $n-$tego rzędu.

8. Omów równanie różniczkowe zwyczajne Bernoulliego i równanie różniczkowe zwyczajne Riccatiego. Jak je rozwiązujemy?

9. Omów równanie różniczkowe zwyczajne zupełne. Co to jest czynnik całkujący?

10. Omów równanie różniczkowe zwyczajne Lagrange'a i równanie różniczkowe zwyczajne Clairauta. Jak je rozwiązujemy?

11. Określ fundamentalną (podstawową) macierz rozwiązań liniowych układów równań różniczkowych zwyczajnych. Omów macierz normowaną i jej własności.

12. Omów metody rozwiązywania układów liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach. Znajdź rozwiązanie układu równań $\frac{d\,y_1}{d\,x} = y_1 + 2\,y_2$, $\frac{d\,y_2}{d\,x} = 2y_1 - 2\,y_2$.

13. Omów metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych postaci $P(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Znajdź ogólne rozwiązanie równania $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

14. Omów metody rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych postaci $P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = R(x,y,u)$. Znajdź ogólne rozwiązanie równania $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 3$.

15. Sprowadź równanie $A\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\,\frac{\partial u}{\partial x} + e\,\frac{\partial u}{\partial y} + f\,u = 0$, gdzie $u = u(x,y)$, do postaci kanonicznej. Omów typy otrzymanych równań.

16. Omów wybrane równania różniczkowe cząstkowe fizyki matematycznej.

17. Przedstaw zastosowanie metody Fouriera rozdzielenia zmiennych do rozwiązania równania drgania struny zamocowanej w dwóch punktach.

18. Przedstaw zastosowanie metody Fouriera rozdzielenia zmiennych do rozwiązania równania przewodnictwa ciepła $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

8. Metody numeryczne w technice

1. Omów metodę różnic skończonych.
2. Omów metodę elementu skończonego.
3. Omów wybraną metodę wielokrokową przybliżonego rozwiązywania zagadnień Cauchy'ego.
4. Omów metody predykator-korektor przybliżonego rozwiązywania zagadnień Cauchy'ego.
5. Omów wybraną metodę przybliżonego rozwiązywania równań całkowych.

9. Modelowanie i symulacja stochastyczna

1. Podaj definicję prostego procesu Poissona. Scharakteryzuj własności braku „pamięci”, niezależności oraz stacjonarności przyrostów tego procesu.

2. Zdefiniuj niestacjonarny (niejednorodny) proces Poissona.

3. Zdefiniuj prosty proces odnowy. Podaj postać równania odnowy dla tego procesu i wyjaśnij jego sens.

4. Zdefiniuj dyskretny łańcuch Markowa i podaj przykład takiego łańcucha.

5. Podaj definicję stanu: chwilowego, powracającego, pochłaniającego i okresowego w dyskretnym łańcuchu Markowa. Zilustruj te pojęcia na przykładowym łańcuchu Markowa.

6. Podaj definicję rozkładu ergodycznego dyskretnego łańcucha Markowa oraz sposób wyznaczania tego rozkładu w przypadku łańcucha o skończonej przestrzeni stanów.

7. Podaj definicję łańcucha Markowa z czasem ciągłym oraz macierzy intensywności (generatora). Na wybranym przykładzie omów przebieg trajektorii łańcucha w zależności od postaci generatora.

8. Zdefiniuj proces gałązkowy Galtona-Watsona rozwoju populacji i podaj związany z nim warunek wymieralności populacji.

9. Omów metodę generowania zmiennej losowej typu ciągłego o zadanej dystrybuancie metodą funkcji odwrotnej.

10. Omów metodę eliminacji generowania zmiennej losowej typu ciągłego.

10. Metody eksploracji danych

1. Omów ideę metody składowych głównych i jej zasadnicze cele.

2. Omów metodę konstrukcji „naiwnego” klasyfikatora bayesowskiego oraz sposób wykorzystania go w praktyce.

3. Na wybranym przykładzie scharakteryzuj pojęcie drzewa decyzyjnego oraz klasyfikacji za pomocą tego drzewa.

4. Omów ideę grupowania hierarchicznego i pojęcie dendrogramu.

5. Scharakteryzuj metodę grupowania k-średnich.

6. Podaj definicję reguły asocjacyjnej oraz zdefiniuj wsparcie i ufność reguły, ilustrując te pojęcia odpowiednim przykładem.

7. Omów działanie wybranego algorytmu odkrywania zbiorów częstych.

8. Podaj definicję sekwencji oraz wzorca sekwencji i zilustruj je przykładem.

11. Programowanie obiektowe

1. Przedstaw podstawowe założenia paradygmatu obiektowego.

2. Przedstaw różnice między programowaniem zorientowanym obiektowo a programowaniem strukturalnym.

3. Przedstaw budowę klasy i interfejsu w języku C♯.

4. Wyjaśnij pojęcie abstrakcji w programowaniu zorientowanym obiektowo.

5. Wyjaśnij pojęcie hermetyzacji w programowaniu zorientowanym obiektowo.

6. Wyjaśnij pojęcie polimorfizmu w programowaniu zorientowanym obiektowo.

7. Wyjaśnij mechanizm dziedziczenia w programowaniu zorientowanym obiektowo. Podaj stosowny przykład.

8. Przedstaw zastosowania przeciążenia metod w programowaniu zorientowanym obiektowo.