Redaktor odpowiedzialny: Antoni M. Rusiecki.
Wydawca: Drukarnia i Księgarnia św. Wojciecha.
Czcionkami Drukarni św. Wojciecha w Poznaniu.

TOM 1 ZESZYT 1

PARAMETR

CZASOPISMO POŚWIĘCONE NAUCZANIU MATEMATYKI

WYCHODZI
POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO
PRZY WSPÓŁUDZIALE S. STRASZEWICZA

WARSZAWA — POZNAŃ

1930

PARAMETR

TOM 1, ZESZYT 1. STYCZEŃ 1930.

TREŚĆ:

Artykuły, listy do Redakcji, egzemplarze książek i czasopism należy adresować do Redaktora Antoniego Marjana Rusieckiego — Warszawa, ul. Koszykowa Nr. 31—5. (Telefon 441-17).

Prenumeratę i wszelkie sprawy administracyjne należy kierować do Administracji „Parametra" — Poznań, Al. Marcinkowskiego 22. (Konto czekowe P. K. O. 200.032. Drukarnia i Księgarnia św. Wojciecha. Poznań.)

Prenumerata roczna (za 10 zeszytów) wynosi zł 15.—; półroczna (za 5 zeszytów) — zł 8.— Zagranicą abonament roczny — zł 20.—, półroczny zł 10.—.

Cena poszczególnych zeszytów „Parametra" zł 1.80.

Podpisane do druku 3. I. 1930.

TOM 1 *ZESZYT 1*

PARAMETR

CZASOPISMO POŚWIĘCONE NAUCZANIU MATEMATYKI
WYCHODZI POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO
PRZY WSPÓŁUDZIALE DRA STEFANA STRASZEWICZA

STYCZEŃ 1930

SŁOWO WSTĘPNE. [1]

Polska jest Ojczyzną Mikołaja Kopernika z Torunia, Jana Brożka z Kurzelowa, Jana Sniadeckiego ze Żnina.

Genjusz matematyczny polski wysunął w dobie obecnej Matematykę polską na czołowe miejsca w nauce światowej.

A jednak powszechne są narzekania na niedostateczne wyniki nauczania matematyki w szkołach polskich.

Nie będziemy tu analizowali przyczyn tego zjawiska; wystarcza, że stwierdzimy potrzebę naprawy w tej dziedzinie życia polskiego.

Chętnie więc podjęliśmy inicjatywę Instruktora Matematyki w Wydziale Kształcenia Nauczycieli Ministerstwa Wyznań Religijnych i Oświecenia Publicznego p. Antoniego Marjana Rusieckiego, by założyć czasopismo, któreby służyło sprawie nauczania matematyki w szkołach Rzeczypospolitej Polskiej.

Oddając pierwszy zeszyt „Parametra" w ręce Nauczycielstwa i Tych wszystkich, którym nauczanie matematyki leży na sercu, sądzimy, że „Parametr" wypełni lukę, jaka istnieje w polskiem czasopiśmiennictwie pedagogicznem, i przyczyni się do podniesienia poziomu dydaktyki matematycznej w Polsce.

Czasopismo omawiać będzie sprawy, związane z nauczaniem matematyki w szkołach powszechnych i średnich ogólnokształcących oraz w zakładach kształcenia nauczycieli i w szkołach zawodowych. Znajdzie się też w niem dział dla starszej młodzieży szkolnej.

Redakcję czasopisma objął p. A. M. Rusiecki przy łaskawym współudziale Dra Stefana Straszewicza, Profesora Politechniki Warszawskiej. Nazwiska obu współredaktorów, którzy się nawzajem będą uzupełniali, wydają się dostateczną gwarancją tego, że „Parametr" będzie utrzymany na odpowiednim poziomie. Ze swej strony dołożymy wszelkich starań, by szata zewnętrzna czasopisma odpowiadała powadze zadań, którym ma służyć.

Podejmując to wydawnictwo, Księgarnia św. Wojciecha traktuje czasopismo „Parametr" wyłącznie jako wdzięczną placówkę pracy społecznej i pragnie jej poświęcić swe wieloletnie doświadczenie wydawnicze.

Mamy niepłonną nadzieję, że Władze Oświatowe Rzeczypospolitej udzielą naszym zamierzeniom opieki i poparcia, a Nauczycielstwo uzna czasopismo za swoje, będzie je popierało i zasilało współpracą, a także życzliwą krytyką.

Od tego poparcia zależy, czy czasopismo będzie miało rację istnienia. Od powodzenia czasopisma wśród Czytelników uzależniona jest też możność rozszerzenia ram wydawnictwa i wzbogacenia jego treści. Dla Wydawcy byłaby to najpiękniejsza nagroda za jego współpracę.

KSIĘGARNIA ŚW. WOJCIECHA.
DZIAŁ WYDAWNICZY.

Składając w tem miejscu serdeczne podziękowanie Księgarni św. Wojciecha za ofiarne podjęcie wydawnictwa „Parametra" — Redakcja prosi PP. Kolegów o współpracę i o nadsyłanie uwag krytycznych i dezyderatów zarówno w sprawie ogólnego programu czasopisma, jak i w sprawie poszczególnych artykułów.

Sądzimy, że „Parametr" tem lepiej będzie mógł spełniać swe zadanie, im żywszy znajdzie oddźwięk w gronie Czytelników.

REDAKCJA.

ROZPRAWY.

ADAM ZARZECKI (Warszawa). [2]

Treść i pytanie w zagadnieniach z tekstem słownym.

Dziecko, zaznajamiając się z działaniem, choćby np. z dodawaniem, potrzebuje *konkretyzacji*. Jeżeli więc chcemy opracować przypadek $2+3$, to dwa kasztany trzymane w jednej rączce i trzy kasztany trzymane w drugiej, a później złączenie rąk — i pięć kasztanów w połączonych łapkach, to najlepszy dowód dla dziecka, że $2+3=5$. Podsuwanie dziecku przy tej pracy niepotrzebnych dodatków w rodzaju np. opowieści: „siostrzyczka znalazła dwa kasztany, a braciszek trzy kasztany" i pytania: „ile kasztanów znaleźli razem?" — to tylko rozpraszanie uwagi dziecka i utrudnianie mu pracy.

Po pewnej ilości doświadczeń z przedmiotami dotykanemi, widzianemi, narysowanemi, dziecko dochodzi do działań *abstrakcyjnych:* $3+4=7$, $4+5=9$ i t. d. Działania te same przez się interesują dziecko i stanowią dla niego zamkniętą całość. Niema potrzeby ubierania działań w formę zagadnień, jakoby dla wzbudzenia zainteresowania.

Weźmy teraz najprostsze *zagadnienie:* „Irka miała 2 jabłuszka, a od Mamusi dostała jeszcze 3 jabłuszka. Ile jabłuszek miała teraz Irka?"

Niema tu już konkretnych jabłek, występują tylko wyobrażenia ich zbiorów, a przy rozwiązaniu posiłkować się trzeba abstrakcyjnem działaniem: $2+3$. Swobodnie rozwiązać to zagadnienie potrafi tylko ten, kto wie dobrze, że $2+3=5$.

W zagadnieniu mamy *opowieść o pewnym fakcie,* który kiedyś i gdzieś miał miejsce, przy wykonywaniu działania na konkretach mamy *sam fakt* — są np. kasztany, które dziecko trzyma w rączkach.

Tak więc *samo działanie* a *zagadnienie,* które rozwiązuje się przy pomocy tego działania, to dwie rzeczy zupełnie różne; przy splątaniu ich dziecko nie nauczy się ani wykonywania działań, ani rozwiązywania zagadnień, — oba zjawiska tak powszechne dzisiaj.

Rozwiązywanie zagadnień z tekstem słownym rozpoczynać należy z dziećmi dopiero po opanowaniu przez nie działań. Naukę każdego działania rozkładamy na pewne etapy. Otóż rozwiązywanie odpowiednich zagadnień tekstowych winno iść równolegle z temi etapami, czyli po owładnięciu przez dzieci dodawania w zakresie np. do 5 wprowadzić należy odpowiednie zagadnienia tekstowe; chodzi o to, że należy je wprowadzać *po opanowaniu, a nie w czasie pracy* nad opanowaniem działania w danym zakresie.

Jaką rolę odegrać winny zagadnienia z tekstem w nauczaniu matematyki? Starsi, a za nimi i dzieci patrzą na zadania pomieszczane w podręcznikach, jak na łamigłówki, których rozwiązywanie w dostatecznej ilości ma podobno dać coś w życiu. Czy rozwiązywanie łamigłówek może dać coś więcej ponad świadectwo z ukończenia danej klasy, wątpię, bo w życiu, po skończeniu szkoły, młodzież najczęściej jest zupełnie bezradna wobec najprostszych kalkulacyj kupieckich czy przemysłowych. Dopiero „praktyka" wypełnia luki. Zresztą i w samej szkole słyszymy wieczne utyskiwania nauczycieli fizyki, że uczniowie tak mało zaawansowani są w matematyce.

Każdy z nas wie, jak układane są dzisiejsze zbiory zadań. W niejednym z takich zbiorów na jednej stronicy można znaleźć szereg zadań, w których mówi się np. o rybkach, o uczniach, o ubraniu, o poszewce, o zapałkach, o zarobkach, o beczce wina, o drodze przebytej przez pociąg, o znaczkach pocztowych, o cegłach. Czy takie zadania mogą dzieci zaciekawić? Jeżeli dodamy jeszcze, że do rozwiązania wszystkich owych dziesięciu zadań trzeba stosować jedno jedyne działanie, to możemy dojść do wniosku, że sprytniejsze dziecko, zobaczywszy w tytule działu „mnożenie", zupełnie nie czytając tekstów, a przepisując w nich tylko liczby, może wszystkie te zadania rozwiązać i nic z tej pracy nie skorzysta — poza nabyciem jeszcze odrobiny wprawy w mnożeniu. Bezsensowne! Toć my, ludzie dorośli, zainteresować się możemy zagadnieniami wtedy tylko, gdy dotyczą one pewnej określonej dziedziny. Wyjątek stanowią zagadnienia traktowane jako pewnego rodzaju rozrywki: potrafię, czy nie potrafię rozwiązać? Tego typu zagadnienia przez wieki całe obiegają grona interesujących się niemi, ale jasnem jest, że na nich przy nauczaniu oprzeć się nie można. Należy z niemi zaznajamiać dzieci, ale podstawowa zasada działu zagadnień z tekstem słownym musi być inna.

Przystępując do jakiejkolwiek grupy zagadnień, powinniśmy zawsze najpierw wprowadzić dzieci w tę dziedzinę, której dotyczą owe zagadnienia. Dziedziny te muszą być dzieciom znane, więc będą to np. zabawy, życie domowe, życie szkolne, wycieczki, podróże i t. p. Stwórzmy najpierw w umysłach dzieci ową fantazję, o którą tak łatwo u nich, i wtedy dopiero poddajmy dzieciom odpowiednie zagadnienia do rozwiązania. Zupełnie inaczej reagować będą dzieci, jeżeli zagadnienie o drodze przebytej przez pociąg przy danej jego prędkości i w danym czasie jazdy nie „spadnie z nieba" między beczką wina a znaczkami pocztowemi, lecz gdy przed przystąpieniem do właściwej pracy zatrzymamy dzieci na krótkiej rozmowie o jeździe pociągiem, wplatając umiejętnie kwestje przebytej drogi, prędkości pociągu i czasu jazdy. Ileż odrazu zjawi się pytań, ile nowych wiadomości będą mogły nabyć dzieci! Boć oto zjawi się pytanie, czem jest właściwie prędkość pociągu: pociąg na stacjach staje, rusza wolno, nabywa rozpędu, dochodząc do następnej stacji znów zwalnia, a my mówimy o jakiejś prędkości, tak jakgdyby ona się nie zmieniała. Wyłoni się sprawa „średniej prędkości". Mówimy o prędkości w „kilometrach na godzinę", a jak obliczyć, ile to „metrów na minutę"? Możeby porównać prędkości pociągów z innemi prędkościami — piechura, konia, cyklisty, samochodu, samolotu? Znów inne pytanie: z jaką prędkością chodzą pociągi? Może rozkład jazdy coś powiedziałby o tem? (a niejedno z dzieci nie widziało dotąd rozkładu jazdy). Tysiące zagadnień!

Czytelnik widzi, że przy tak postawionej sprawie, dzieci mogą „zarzucić" nauczyciela pytaniami. Nie wybierałem żadnej specjalnej dziedziny; to samo, co o ruchu pociągu, da się powiedzieć o każdej innej dziedzinie.

Reasumujemy wyżej powiedziane: *przed rozpoczęciem rozwiązywania pewnej grupy zagadnień ustalamy dziedzinę,* *której zagadnienia te dotyczyć mają i w dziedzinę tę wprowadzamy dzieci*).* Ale nie koniec na tem.

Praktyka życiowa (np. handlowa lub przemysłowa), jak również nauka, wymagają umiejętności dwóch rzeczy: albo *staję przed pewnem pytaniem, na które nie mam bezpośredniej odpowiedzi, i muszę szukać dostatecznych danych, aby móc na nie odpowiedzieć,* albo odwrotnie: *mam szereg danych i stawiam sobie pytanie, jakie wnioski potrafię z nich wysnuć.* Przy ilościowych danych wdrażanie dzieci do umiejętnego stawiania i rozwiązywania powyższych pytań jest właśnie zadaniem tej części nauczania matematyki, którą mianujemy „zagadnieniami z tekstem słownym". Weźmy przykłady:

I. Staję przed pytaniem, do którego rozwiązania nie mam jeszcze dostatecznych danych: Sklepik szkolny ma zaopatrzyć jedną klasę w materjały piśmienne i chce wiedzieć, ile na to potrzeba pieniędzy. Kierownicy sklepiku muszą wystarać się o dane potrzebne do wyznaczenia odpowiedzi (ilość poszczególnych artykułów, ich cen, ewentualny rabat i koszty dostawy).

II. Mam szereg danych i pytam, jakie wnioski mogę z nich wyciągnąć:

w klasie	pierwszej	uczy się	28	chłopców	i 12	dziewczynek
„	drugiej	„ „	23	„	18	„
„	trzeciej	„ „	15	„	16	„
„	czwartej	„ „	12	„	16	„

Jakie zagadnienia mogę stąd wysnuć? Zamiast stawiania pojedyńczych pytań: ile dzieci jest w tych czterech klasach, ilu chłopców i ile dziewczynek jest w tych klasach, o ilu więcej chłopców niż dziewczynek jest w tych klasach, — pozwólmy dzieciom samym snuć zagadnienia i to nie jedno, a możliwie największą ich ilość.

*) *Uwaga Redakcji.* Przykłady takiej koncentracji zagadnień dookoła pewnych tematów Czytelnicy znajdą w podręcznikach:
= Jan Hellmann i Adam Zarzecki | Młody Matematyk | część pierwsza | Warszawa — 1926 | Nakładem „Schola Nova"... | For. $22^1/_2 \times 15$ Str. 80.
= To samo: Część druga. 1927. For. $23 \times 15^1/_2$. Str. 99.
= To samo: Część trzecia. 1928. For. 22×15. Str. 106.

W zagadnieniach drugiego typu z nasuwających się pytań nauczyciel wybierze nieraz jedno tylko — to, które mu będzie potrzebne, bądź ze względu na wprowadzenie nowego materjału arytmetycznego, bądź też dla celów wyćwiczenia dzieci w zakresie opracowanego pytania. Takie zatrzymywanie dzieci przy jednej kwestji jest celowe i konieczne. Dotychczasowe zbiory zadań, pomijając inne błędy, o których wyżej mówiłem, tem właśnie grzeszą, że dają dzieciom przeważnie tylko zagadnienia takiego typu, przyczem zawsze narzucają pytanie i przesądzają zgóry, że podane w zadaniu warunki są dostateczne do wyznaczenia odpowiedzi. Sądzę, że dopiero na tle całego kompleksu zagadnień z pewnej dziedziny staje się dla dzieci jasnym związek logiczny między warunkami zadania, a postawionem w zadaniu pytaniem.

Omówiliśmy dotąd sprawę *„postawienia zagadnienia"*. Z kolei rzeczy przejść musimy do sprawy *wdrożenia w rozwiązywanie* postawionych zagadnień. Wdrożenie nabywają dzieci przedewszystkiem przez umiejętne stosowanie działań, i tą sprawą zajmiemy się teraz.

Dziecko najłatwiej orjentuje się w potrzebie stosowania dodawania lub odejmowania, daleko trudniej w przypadku mnożenia lub dzielenia. Jeżeli jeden zeszyt kosztuje 15 gr, to ile kosztuje 6 takich zeszytów? Uważamy, że dziecko dopiero po dużym wysiłku myślowym zdobywa zrozumienie, że trzeba stosować tu mnożenie. Ileż to razy każdy z nauczających słyszał owe „trafiania" przy rozwiązywaniu zagadnień: „pomnożyć", „podzielić", a przy mnożeniu i dzieleniu ułamków są to rzeczy, wymagające nieraz zastanowienia się nawet u dorosłych. Czasem dziecko nie podejrzewa nawet, że wogóle jakieś działanie zastosować można. Zapytałem kiedyś ucznia klasy wstępnej jednej ze znanych szkół warszawskich, ile kopa ma tuzinów. Uczeń odpowiedział, że nie pamięta. Zapytany, ile sztuk ma kopa i ile tuzin, odpowiedział dobrze. Kiedy zaproponowałem mu, żeby obliczył, ile tuzinów ma kopa, zdziwił się bardzo i odpowiedział, że to przecież trzeba wiedzieć, tak jak wiemy np., że łokieć ma 24 cale, a obliczyć się to nie da. Nie podejrzewał, że można tu zastosować dzielenie.

Jeżeli dziecko nie może zorjentować się, jakie działanie należy zastosować w wypadku, kiedy dla rozwiązania zagadnienia trzeba wykonać jedno tylko działanie, najlepiej uzmysłowić mu treść zadania zapomocą jakichkolwiek liczmanów. Tak np. w zagadnieniu: „jeżeli jeden zeszyt kosztuje 15 gr, ile kosztuje 6 takich zeszytów" — ułóżmy 6 kartek papieru, a przy każdej połóżmy po 15 gr, a najlepiej przekonamy dziecko o potrzebie zastosowania w tym wypadku mnożenia.

Przy zagadnieniach bardziej skomplikowanych często dziecko nie umie dobrać działania, gdyż nie może uchwycić porządku w przebiegu zagadnienia. Dzieci bardzo często mylnie rozwiązują takie np. zagadnienia: „piechur w ciągu pierwszego dnia przeszedł 20 km, a w ciągu drugiego przeszedł o 4 km więcej; ile km piechur przeszedł w ciągu obu dni?" Dość jednak zamiast jednego pytania postawić dwa: ile kilometrów przeszedł piechur w ciągu drugiego dnia i ile kilometrów przeszedł piechur w ciągu obu dni, aby zagadnienie nie sprawiało dzieciom żadnych trudności.

Ten sam cel osiągnąć można przez tak zwany *„protokół"* zdarzenia, opisanego w zagadnieniu. Więc „protokół" przytoczonego zagadnienia brzmiałby tak:

„Piechur w ciągu pierwszego dnia przeszedł 20 km, a w ciągu drugiego dnia przeszedł o 4 km więcej, więc przeszedł . . . km. Ponieważ pierwszego dnia przeszedł 20 km, a drugiego dnia przeszedł . . . km, więc w ciągu obu dni przeszedł . . . km".

Dzieciom nie sprawi trudności wypełnienie luk kropkowanych w „protokóle".

Jeżeli we właściwy sposób opracujemy pewne typy zagadnień z danej dziedziny, i dzieci będą umiały wyznaczać odpowiednie działania, to same wprowadzą nas na inne typy zagadnień. Jeżeli np. mówiliśmy o drodze przebytej przez pociąg przy danej jego prędkości w danym czasie, to dzieci zechcą odwrócić te dane i szukać np. prędkości przy danych: drodze i czasie jazdy. O ile tylko zasób wiadomości posiadanych przez dzieci pozwoli na to, nie należy opierać się ich życzeniu i rozszerzyć badania w opracowywanej dziedzinie bez odkładania ich na przyszłość.

DR. LUDWIKA JELEŃSKA (Grodno). [3]

Ważne zaniedbanie.

Nauczyciel, rozwiązując z dziećmi zadania w klasie, — bez względu na drogę, którą prowadzi do rozwiązania, — zazwyczaj każe zapisywać działania na tablicy. Jeżeli tablica nie mieści całego zapisu, to ściera się pierwsze działania i pisze na ich miejscu następne — aż do otrzymania odpowiedzi. A potem? — potem ściera się wszystko i rozpoczyna nowe zadanie. Tu dopuszcza się nauczyciel ważnego niedopatrzenia.

Postarajmy się wniknąć, jaką korzyść odnoszą z takiej pracy uczniowie. Stosunek nauczyciela i wybitnie zdolnych uczniów do zadania jest inny, niż ogółu uczniów w klasie. Nauczyciel i tych kilku uczniów najzdolniejszych panują nad zadaniem, t. j. ogarniają całość: wewnętrznie — w sobie — widzą jego rozwiązanie, wykonanie zaś jest dla nich pracą mechaniczną. Zgoła w innej sytuacji są pozostali uczniowie. Nie mając tego wewnętrznego widzenia zadania, muszą zdobyć *zrozumienie rozwiązania* przez sam *proces rozwiązywania.*

Jeżeli weźmiemy pod uwagę, że tempo pracy myślowej u każdego jest różne, że wielu, nie mogąc nadążyć, zapisuje tylko działania, nie widząc jasno ich powiązania, to zrozumiemy, jak minimalną korzyść przynosi ogółowi uczniów ta praca w klasie, którą nauczyciel uważa za podstawę do samodzielnej pracy domowej. Ten sposób — nie uczy.

Człowiek o wykształceniu muzycznem nie potrzebuje przegrywać melodji; on ją sobie uprzytomni, patrząc w nuty. Ktoś, kto nie czyta nut, musi usłyszeć odegraną melodję, aby mógł ją ująć; przytem, im bardziej melodja jest zawiła, tem więcej wymaga powtórzeń, aby można ją było ogarnąć w całości. I nie jest to tylko kwestją pamięci. Warunkiem bowiem zapamiętania jest ujęcie melodji w całości — w jej rozwoju, czyli muzyczne „zrozumienie" melodji; dopóki się jej w całości nie ujęło, dopóty się nad nią nie panuje, a więc i pamięciowo opanować jej nie można.

Coś podobnego dzieje się przy rozwiązywaniu zadań. Dla nauczyciela zadania są melodją znaną: wystarczy przeczytać zadanie, aby wiedział, jak je rozwiązać, ponieważ panuje nad całością. Ale dla przeciętnego ucznia rozpoznanie typu zadania *przed* rozwiązywaniem bynajmniej łatwem nie jest; najczęściej dopiero po rozwiązaniu uczniowie stwierdzają, że podobne zadanie już rozwiązywali byli na poprzednich lekcjach.

Jak dla osób bez kultury muzycznej odegranie melodji daje jej rozpoznanie i ujęcie całości, czyli zrozumienie, — tak dla uczniów, nie posiadających kultury matematycznej, rozwiązanie zadania jest tem „odegraniem melodji", która ma dać zrozumienie. Ale właśnie dlatego rozwiązane już zadanie powinno być *ujęte w całości.* Tej pracy nie wolno nauczycielowi zaniedbać.

Z rozważań powyższych płyną następujące wskazania:

1°. Przy rozwiązywaniu zadań działania powinny być wszystkie — od pierwszego do ostatniego — wypisane na tablicy. (Stąd potrzeba posiadania w starszych klasach większych tablic i oszczędzania miejsca na tablicy przez systematyzowanie zapisu.) Zaznaczmy przy sposobności, że do rozwiązywania zadania — dopóki typ zadania nie jest jeszcze przez klasę dostatecznie opanowany — należy „wyrywać" uczniów zdolniejszych. Próba rozwiązywania zadań przez uczniów słabszych przy pomocy nauczyciela — jest psychologicznie chybiona z następujących powodów: a) uczeń słabszy miesza się przy tablicy, bo oczywiście nie może nie pamiętać o ocenie; b) pomoc nauczyciela w formie pytań podrzędnych, z częstym — jak to bywa — nawrotem do poprzednich wiadomości ucznia, utrudnia pracę całej klasie, zamulając przejrzystość rozwiązania; c) nieudolność ucznia wywołuje zniecierpliwienie nauczyciela (matematycy ponoć są najbardziej skłonni do irytacji), a jeśli się pominie — jako wyjątkowe — niekulturalne obelgi rzucane uczniowi, to w każdym razie męczeński uśmiech na twarzy nauczyciela, wznoszenie oczu lub sztuczny, karmelkowy ton mowy, mający maskować zniecierpliwienie, — musi działać paraliżująco na dyspozycje myślowe uczniów. Lepiej tego uniknąć. Niech rozwiązuje uczeń dobry, — będzie to z większą korzyścią dla całej klasy.

2°. Po rozwiązaniu zadania nastąpić powinna najbardziej pouczająca praca — *odczytanie zadania* podług działań od początku do końca. Odczytywać powinien uczeń słabszy; wówczas dopiero nauczyciel będzie mógł ocenić, jaki jest stosunek ogółu uczniów do zadania.

3°. Odczytywanie zadania powinno być *parokrotne.* Lepiej rozwiązać jedno zadanie w ciągu godziny z parokrotnem odczytaniem po skończeniu, niż rozwiązać kilka zadań bez odczytywania. Należy doprowadzić do odczytywania płynnego, wykazującego pełne zrozumienie. Zaznaczyć również należy wielką wartość odczytywania zadań dla językowego wyrobienia uczniów, zwłaszcza w klasach niższych.

Odczytywanie zatem rozwiązanego zadania jest konieczne na wszystkich stopniach nauczania.

Powtórzenie jako *przypomnienie* jest pracą mało kształcącą (choć niezbędną w nauczaniu), ale powtórzenie jako *zebranie toku myśli* nie jest przypomnieniem, lecz *utrwaleniem.* Z tego właśnie względu *odczytywanie rozwiązania zadań* jest pracą niezmiernie kształcącą, bo ono właśnie daje możność opanowania przedmiotu. Dlatego zaniedbywać go nie wolno.

STANISŁAW GRZEPSKI. [4]

„Przetoż iesli zaraz nie wyrozumiesz czego, wyrozumiesz drugim razem, albo trzećim, według dowćipu. Rozum człowieczy jest takowy, im więcey co bierze przed sye, im częśćiey co rozmyśla, tym przestrzeniey sobie w oney rzeczy czyni, tym więcey obacza y nayduie, czego przedtym nie obaczył nie nalazł."

Wyjęte z dzieła S. Grzepskiego:

GEOMETRIA. To jest Miernicka Nauka po Polsku krótko napisana z Graeckich i Łaćińskich Księg. Roku 1566. W Krakowie.

HELENA STATTLERÓWNA (Warszawa). [5]

Lekcja w szkole powszechnej na temat „Siatka sześcianu".

Omawiając temat powyższy, nie kuszę się bynajmniej o przedstawienie lekcji t. zw. „wzorowej"; chcę jedynie podzielić się z ogółem Kolegów wynikami próby, podjętej w celu przełamania szablonu, który, jak dotąd, towarzyszy traktowaniu siatek brył.

Jako przykład powszechności i zarazem szkodliwości owego szablonu może posłużyć fakt następujący:

Kilka lat temu jedna ze słuchaczek grupy matematyczno-fizycznej Państw. Wyż. Kursu Naucz. w Warszawie obrała sobie siatkę sześcianu za temat t. zw. próbnej lekcji w oddziale V. Przedstawiony mi do oceny bardzo pomysłowy konspekt i starannie przygotowane pomoce naukowe zdawały się wróżyć lekcji zupełne powodzenie.

Niestety, nauczycielka nie przewidziała jednej okoliczności, tej mianowicie, że jakkolwiek program matematyki umieszcza siatkę sześcianu dopiero w oddziale V, dzieci znają się już z nią o wiele wcześniej z lekcyj robót ręcznych. I oto wszystkie wysiłki nauczycielki rozbiły się o wyuczony przez dzieci szablon: na wszelkie pytania, na wszelkie zachęty do badań samodzielnych dzieci nieodmiennie odpowiadały, że trzeba wykreślić „taki krzyż" z sześciu kwadratów; inaczej nie wolno! Nawet rozmieszczenie listewek do sklejania było raz na zawsze w drodze pamięciowej ustalone.

Nauczona cudzem niepowodzeniem, postanowiłam przystąpić do tego odcinka pracy z całkiem innej strony. Przyjęłam mianowicie za fakt dokonany, że dzieci ową stereotypową siatkę sześcianu już znają, i zamiast od siatki przejść do budowy bryły, postanowiłam, odwrotnie, *powierzchnię bryły rozwinąć na siatkę*.

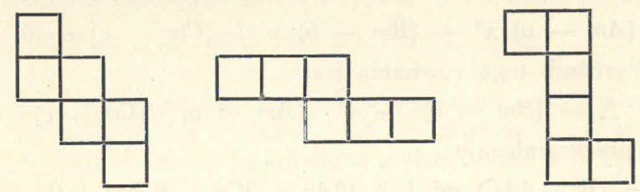
W tym celu przygotowałam najpierw dużą liczbę tekturowych sześcianków o krawędzi 5 cm i rozdałam je dzieciom. Po krótkiem omówieniu bryły zaproponowałam dzieciom, aby rozcięły nożyczkami niektóre krawędzi tak, „aby sześcian się rozpłaszczył". Dzieci wahały się; żal im było psuć ładną kolorową bryłę, tem bardziej, że — jak twierdziły — zgóry

wiedziały, co otrzymają: „To będzie taki krzyż, jaki się zwykle do siatki robi!"

Tem większe było zdziwienie i zainteresowanie, gdy większość wcale nie otrzymała „krzyża", lecz najróżniejsze i nieraz bardzo ciekawe układy. Jedno przez drugie domagało się, aby mogło swoją siatkę przerysować na tablicy; wymieniały siatki między sobą i zpowrotem składały z nich sześciany, aby się przekonać, „skąd się to wzięło".

Wreszcie całkiem już samorzutnie dzieci zaczęły poszukiwać, czy nie można jeszcze inaczej ułożyć siatki, oraz zastanawiać się nad praktycznem znaczeniem poczynionych odkryć. Doszły do wniosku, że wybór siatki jest w praktycznym związku z kształtem i rozmiarami kartki papieru, którą rozporządzają. Nastąpiły ćwiczenia: jaką siatkę należy wybrać przy danym kształcie kartki.

Podaję tutaj ciekawsze siatki sześcianu odkryte przez dzieci.



O ile wnosić mogłam z przebiegu lekcji i z pytań, jakiemi mię dzieci zasypywały po lekcji, cel, który sobie postawiłam, t. j. przełamanie szablonowego nawyku i pogłębienie pojęcia siatki, został osiągnięty. Gdy w późniejszym przebiegu pracy wypadło kreślić siatki innych brył, dzieci już bez mojego polecenia zabierały się do samodzielnych badań, bądź rozcinając bryły sklejone poprzednio, bądź też kreśląc siatki na zasadzie obserwacji i próbując z nich budować daną bryłę. Bywały nieraz próby naiwne, np. próba siatki ostrosłupa kwadratowego tak, żeby, jak same orzekły, „wszystko się trzymało w jednym wierzchołku", niemniej myśl i ręce dzieci pracowały; wymieniano spostrzeżenia, poddawano pomysły wzajemnej krytyce, a równocześnie starano się znaleźć dla nich praktyczne uzasadnienie.

Prace samodzielne tego typu wpłynęły również bardzo na rozwój wyobraźni przestrzennej.

DR. KAZIMIERZ CWOJDZIŃSKI (Poznań). [6]

Sposoby tworzenia równań kwadratowych o jednym parametrze zmiennym, których wyróżnik ma pierwiastki wymierne.

Jak każdemu nauczycielowi matematyki wiadomo, przy nauczaniu „dyskusyj" powstaje potrzeba tworzenia takich równań kwadratowych ze zmiennym parametrem m, których wyróżnik $\triangle = F(m)$ ma pierwiastki *wymierne*.

Są typy równań, które się dyktuje bez namysłu, jak np.:

$$(3m - 4)\, x^2 + (7m - 2)\, x - 5 \cdot (7m - 2) = 0.$$

Wyróżnik ma tu jako jeden czynnik $(7m - 2)$ z pierwiastkiem wymiernym, wobec czego też i drugi, mniej widoczny pierwiastek musi być wymierny. Nie potrzeba wymieniać innych typów równań, których wyróżnik ma pierwiastki wymierne i widoczne, bo je każdy matematyk bez trudności tworzy.

Chodzi tutaj o tworzenie typów równań, których wyróżniki mają bardziej zakapturzone pierwiastki.

Ograniczymy się do współczynników *linjowych*, a więc do typu:

$$(Am - a)\, x^2 + (Bm - b)\, x + (Cm - c) = 0. \tag{1}$$

Wyróżnik tego równania jest:

$$\triangle = (Bm - b)^2 - 4 \cdot (Am - a) \cdot (Cm - c)$$

lub po przekształceniu

$$\triangle = (B^2 - 4AC)\, m^2 + 2 \cdot (2Ac + 2Ca - Bb)\, m + (b^2 - 4ac). \tag{2}$$

Oznaczmy $D = B^2 - 4AC$.

W przypadku, gdy $D = 0$, wyróżnik $\triangle$ jest funkcją linjową parametra m; ten przypadek nie budzi zainteresowania.

Załóżmy, że

$$D = B^2 - 4AC \neq 0. \tag{3}$$

W tym przypadku wyróżnik $\triangle$ jest trójmianem stopnia drugiego. Aby ten trójmian miał pierwiastki *wymierne*, musi równanie wyróżnikowe $\triangle = 0$ mieć taki wyróżnik δ, który jest ***kwadratem.*** Wyróżnik równania wyróżnikowego jest

$$\delta = 4.\ (2Ac + 2Ca - Bb)^2 - 4 \cdot (B^2 - 4AC) \cdot (b^2 - 4ac),$$

a po przekształceniu

$$\delta = 16.\ [(Ac - Ca)^2 + (Ab - Ba)\, (Cb - Bc)]. \tag{4}$$

Aby ten wyróżnik był kwadratem, musi spełniać równanie

$$(Ac - Ca)^2 + (Ab - Ba)\, (Cb - Bc) = r^2, \tag{5}$$

gdzie r jest dowolną liczbą *wymierną*. Postaramy się tak dobrać liczby A, B, C, a, b, c, aby wyróżnik δ był kwadratem; uchylimy jednak narazie z naszych rozważań przypadek, kiedy $\delta = 0$ (to znaczy kiedy wyróżnik $\triangle$ ma dwa pierwiastki równe).

Zakładamy więc $r \neq 0$.

Jeżeli w równaniu (5) przyjmiemy A, B, C jako wielkości dowolnie obieralne (byle $D \neq 0$), a wielkości a, b, c jako niewiadome, to równanie (5) przedstawia problem z dziedziny *nieoznaczonych* równań kwadratowych.

Podamy tu pewien prosty układ rozwiązań. Z równania (5) widać odrazu, że obierając $a = 0$ i $c = 0$ mamy

$$a = 0,\ b = \frac{r}{\sqrt{AC}} = R,\ c = 0. \tag{6}$$

Liczby A i C poddamy warunkowi, by obie były odmienne od zera oraz by były tak dobrane, aby $\sqrt{AC}$ był liczbą *wymierną*. Dla skrócenia wprowadziliśmy oznaczenie $b = R$.

Zauważmy, że układ

$$a = 0,\ b = R,\ c = 0$$

spełnia też równania linjowe

$$a = \frac{\alpha}{\beta}\,(b - R),\ c = \frac{\gamma}{\beta}\,(b - R), \tag{7}$$

gdzie α, β, γ są dowolnemi liczbami wymiernemi, odmiennemi od zera. Podstawiając do równania (5) na miejsce a i c wyrazy z (7), otrzymamy równanie kwadratowe z niewiadomą b w kształcie następującym:

$$Lb^2 + MRb + NR^2 = 0, \tag{8}$$

gdzie przy pisaniu równania został uwzględniony związek

$$r^2 = ACR^2.$$

Współczynniki L, M, N są następujące:

$$\begin{aligned} L &= (A\gamma - C\alpha)^2 + B^2\alpha\gamma + AC\beta^2 - B\beta\,(A\gamma + C\alpha). \\ M &= -2\,(A\gamma - C\alpha)^2 - 2B^2\alpha\gamma + B\beta\,(A\gamma + C\alpha). \\ N &= (A\gamma - C\alpha)^2 + B^2\alpha\gamma - AC\beta^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Równanie (8), jak wiemy, musi być spełnione przy $b = R$ (co łatwo sprawdzić przez podstawienie i stwierdzenie, że $L + M + N = 0$); wobec tego, jeżeli założymy, że $L \neq 0$, równanie posiada drugi pierwiastek — również wymierny, mianowicie $b = NR : L$.

Chcemy drugi pierwiastek b otrzymać *inny*, niż $b = R$, musimy przeto dopilnować, aby było $N \neq L$, co sprowadza się do warunku

$$P = N - L = AB\gamma + CB\alpha - 2AC\beta \neq 0. \tag{10}$$

Podstawiając tak otrzymaną wartość b do (7), otrzymamy nowe wyrażenia dla a i c; dajemy zestawienie a, b, c:

$$
(11)\qquad \begin{aligned}
a &= \alpha \cdot (AB\gamma + CB\alpha - 2AC\beta) \cdot Q \\
b &= [(A\gamma - C\alpha)^2 + B^2\alpha\gamma - AC\beta^2] \cdot Q \\
c &= \gamma \cdot (AB\gamma + CB\alpha - 2AC\beta) \cdot Q
\end{aligned}
$$

gdzie $Q = R : L$, przyczem pamiętać należy o przyjętych założeniach: $R \neq 0$, $L \neq 0$.

Wzory tak otrzymane nie są symetryczne. Do przekształcenia tych wzorów oprzemy się na tem, że w równaniu (1) można podstawić

$$m = \frac{1}{p}(n - q)$$

przy dowolnych p i q, byle tylko $p \neq 0$. Wtedy równanie (1) po pomnożeniu przez p daje

$$(12)\qquad [An-(ap+Aq)]\,x^2+[Bn-(bp+Bq)]\,x+[Cn-(cp+Cq)]=0.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$a_1 = ap + Aq,\quad b_1 = bp + Bq,\quad c_1 = cp + Cq,$$

otrzymamy równanie analogiczne do równania (1):

$$(13)\qquad (An - a_1)\,x^2 + (Bn - b_1)\,x + (Cn - c_1) = 0.$$

Stosując do tego równania rozważania, przeprowadzone na równaniu (1), ułożymy równanie wyróżnikowe $\triangle_1 = 0$ i obliczymy wyróżnik δ_1 tego równania wyróżnikowego. Okazuje się, że

$$\delta_1 = p^2 \cdot \delta.$$

Wzory (11), które podają warunki dostateczne, by wyróżnik δ był kwadratem, stosują się też do wyróżnika δ_1. Trzeba tylko a, b, c wyrazić przez a_1, b_1, c_1:

$$a = \frac{1}{p}(a_1 - Aq),\; b = \frac{1}{p}(b_1 - Bq),\; c = \frac{1}{p}(c_1 - Cq).$$

Zanim podstawimy te wartości do wzorów (11), nadamy rozporządzalnym parametrom p i q wartości

$$p = \frac{B}{Q},\quad q = AC\beta^2 - B^2\alpha\gamma,$$

przyczem dla zapewnienia $p \neq 0$ przyjąć musimy $B \neq 0$.

Podstawiając tak dobrane wyrażenia otrzymamy nowe a_1, b_1, c_1:

$$
(14)\qquad \begin{aligned}
a_1 &= C \cdot (A\beta - B\alpha)^2 \\
b_1 &= B \cdot (C\alpha - A\gamma)^2 \\
c_1 &= A \cdot (B\gamma - C\beta)^2
\end{aligned}
$$

Wzory te wskazują, że można a_1 zamienić na c_1 i równocześnie C na A, co było do przewidzenia ze względu na budowę wyróżnika. Odrębną atoli rolę grają b_1 i B.

Dla sprawdzenia rozwiązania wypiszemy wyróżnik δ_1 równania wyróżnikowego na podobieństwo wzoru (4), zastępując δ, a, b, c przez δ_1, a_1, b_1, c_1; podstawiając wartości ze wzorów (14), nietrudno sprawdzić, że

$$\delta_1 = 16ACB^2L^2,$$

gdzie L ma tę samą wartość, co we wzorach (9).

Zbadajmy, kiedy wyróżnik $\delta_1 = 0$, to znaczy kiedy równanie wyróżnikowe $\triangle_1 = 0$ posiada podwójny pierwiastek. Nastąpi to wtedy, gdy

$$A = 0,\ \text{albo}\ C = 0,\ \text{albo}\ B = 0,\ \text{albo}\ L = 0,$$

przyczem musi być zachowany warunek $D \neq 0$.

Okazuje się, że wzory, wyprowadzone przy założeniach, by $r \neq 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, $B \neq 0$, $\beta \neq 0$, $L \neq 0$, $p \neq 0$ mogą być stosowane również i w przypadkach, kiedy tych zastrzeżeń nie dotrzymano.

Istotnym warunkiem jest to, by

$$D = B^2 - 4AC \neq 0,$$

a jeżeli ma być $\delta_1 \neq 0$, to trzeba tak dobrać A i C, aby $\sqrt{AC}$ był liczbą wymierną.

Przykład: obieramy

$$\alpha = 1,\quad \beta = 1,\quad \gamma = 1,$$
$$A = 1,\quad B = 3,\quad C = 4,\quad \text{przyczem } B^2 - 4AC \neq 0$$
$$\text{oraz } \sqrt{AC} = 2,$$

i obliczamy $a_1 = 16$, $b_1 = 27$, $c_1 = 1$,

a z tego powstanie równanie (w którem parametr oznaczamy literą m):

$$(m - 16)\,x^2 + (3m - 27)\,x + (4m - 1) = 0.$$

Wyróżnik tego równania jest

$$\triangle = -7 \cdot (m + 5) \cdot (m - 19),$$

a więc równanie ma pierwiastki rzeczywiste pod warunkiem

$$-5 \leqq m \leqq 19.$$

Z każdego otrzymanego równania można tworzyć coraz to nowe, zastępując m przez $(h \cdot m + k)$ przy dowolnych h i k albo też zastępując x przez $(h \cdot x + k)$ przy dowolnych h i k. Można też napisać uogólnienie wzorów (14) na te przypadki. Nie czynimy tego dla krótkości.

Uwaga: Jeżeli wybierzemy liczby A, B, C, α, β, γ tak, by zachodziła proporcjonalność

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma},$$

to otrzymamy równanie trywjalne (parametr równania można będzie wyjąć za nawias).

Najpiękniejszą symetrją odznaczają się wzory, jeżeli zagadnienie uprościmy i zapragniemy równań typu

$$(m - a')\,x^2 + (m - b')\,x + (m - c') = 0.$$

Wtedy będzie $A = 1$, $B = 1$, $C = 1$. Wzory (14) przyjmą postać:

$$\begin{aligned} a' &= (\beta - \alpha)^2 \\ b' &= (\alpha - \gamma)^2 \\ c' &= (\gamma - \beta)^2 \end{aligned} \tag{15}$$

Ze wzorów tych widać, że a', b', c' są przemienne; możnaby więc napisać

$$\begin{aligned} a' &= (\beta - \gamma)^2 \\ b' &= (\gamma - \alpha)^2 \\ c' &= (\alpha - \beta)^2 \end{aligned}$$

W uogólnieniu, wynikającem z zastąpienia m przez funkcję linjową $(h \cdot m + k)$, mamy

$$\begin{aligned} a' &= h \cdot (\beta - \gamma)^2 + k \\ b' &= h \cdot (\gamma - \alpha)^2 + k \\ c' &= h \cdot (\alpha - \beta)^2 + k \end{aligned}$$

gdzie α, β, γ, h, k są dowolnemi liczbami wymiernemi $(h \neq 0)$, byle α, β, γ nie były równe. Oto przykłady:

1) Jeżeli $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, $h = 1$, $k = 0$, to $a' = 4$, $b' = 9$, $c' = 1$, a równanie brzmi

$$(m - 4)\,x^2 + (m - 9)\,x + (m - 1) = 0,$$
$$\Delta = -(m - 5) \cdot (3\,m + 13).$$

2) Jeżeli $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 4$, $h = 3$, $k = -15$, to $a' = -3$, $b' = 12$, $c' = -12$, i równanie brzmi

$$(m + 3)\,x^2 + (m - 12)\,x + (m + 12) = 0,$$
$$\Delta = -3 \cdot m \cdot (m + 28).$$

Cieszyłbym się, gdyby ten i ów z Kolegów na podstawie powyższych wzorów tworzył zadania dyskusyjne.

Cieszyłbym się jednakże jeszcze więcej, *gdyby ich nie potrzebował tworzyć*, a toby nastąpiło, gdyby w programach „dyskusje" zostały zepchnięte na drugi plan lub pozostawione do woli nauczyciela, aby zrobić miejsce dla dyscyplin, również kształcących umysł, ale

1) przygotowujących zrozumienie wyższych części matematyki (np. propedeutyka rachunku pochodnych!),
2) mających zastosowania praktyczne.

Uczeń to nie filozof. Nie imponuje mu nauka, jeżeli nie widzi w niej korzyści dla swego późniejszego życia.

„Non scholae sed vitae discimus".

DZIAŁ DLA MŁODZIEŻY.

ANTONI MARJAN RUSIECKI (Warszawa). [7]

Algebraiczna metoda rozwiązywania zagadnień.

Zakładom Kształcenia Nauczycieli im. Króla Zygmunta Augusta w Białymstoku z okazji ich dziesięciolecia poświęcam.

Rozważmy zagadnienie: *Cyklista przejechał połowę drogi z przeciętną szybkością 24 km na godzinę, a drugą połowę drogi z przeciętną szybkością 16 km na godzinę. Powrotną drogę cyklista zamierzał przejechać w takim samym czasie, ale z szybkością równomierną. Stawiamy pytanie: z jaką szybkością musiał jechać w powrotnej drodze?*

Że nie po 20 km na godzinę, to jest jasne choćby z tego tytułu, że nie byłoby o czem w „PARAMETRZE" gadać. Ale po ile?

Proponujemy sporządzić dokładny i szczegółowy *„protokół"* z przebiegu sprawy, np. w sposób następujący:

„Cyklista jechał z szybkością 24 km na godzinę i w ciągu . . . godzin przebył połowę całej drogi, wynoszącej . . . km, a więc przejechał w tym czasie . . . km. Potem jechał z szybkością 16 km na godzinę i w ciągu . . . godzin przejechał drugą połowę drogi, czyli znowu . . . km. Razem cyklista zużył . . . godzin, na co się złożyło . . . godzin i . . . godzin. W powrotnej drodze cyklista zamierza przejechać . . . km w tym samym czasie . . . godzin, a więc musi wyrabiać przeciętną szybkość . . . km na godzinę.

Jak widać, w „protokole" brak danych liczbowych, dla których zostawiliśmy *puste miejsca;* aby rozróżnić te puste miejsca, oznaczymy je odpowiednio literami, a wielkości, które są oznaczone literami, nazwiemy *parametrami.* Na parametrach będziemy wykonywali działania arytmetyczne, *jakgdyby* to były liczby. Protokół uzupełniony parametrami będzie wyglądał w taki sposób:

„Cyklista jechał z szybkością 24 km na godzinę i w ciągu t_1 godzin przebył połowę całej drogi, wynoszącej d km, a więc przejechał w tym czasie $\frac{1}{2}d$ km. Potem jechał z szybkością 16 km na godzinę i w ciągu t_2 godzin przejechał drugą połowę drogi, czyli znowu $\frac{1}{2}d$ km. Razem cyklista zużył t godzin, na co się złożyło t_1 godzin i t_2 godzin. W powrotnej drodze cyklista zamierza przejechać d km w tym samym czasie t godzin, a więc musi wyrabiać przeciętną szybkość x km na godzinę."

Zagadnienie zostało *nasycone parametrami:* wprowadziliśmy tyle parametrów, ile uznaliśmy za potrzebne do pełnego opisu sprawy; jeżeli zamiast parametrów podamy odpowiednie liczby, to otrzymamy pełny przebieg podróży cyklisty, ujęty ze strony ilościowej.

Teraz przystąpimy do etapu drugiego: do przetłómaczenia „protokołu" na język matematyczny. W tym celu *zakładamy, że zagadnienie zostało rozwiązane.* Litery więc oznaczają teraz pewne *określone liczby,* takie mianowicie, które spełniają wszystkie warunki zagadnienia. Na podstawie protokołu oraz określenia szybkości przeciętnej wypisujemy w postaci wzorów związki między temi liczbami:

$$\begin{aligned} &(1) \quad t_1 \cdot 24 = {}^1/_2 d \\ &(2) \quad t_2 \cdot 16 = {}^1/_2 d \\ &(3) \quad t = t_1 + t_2 \\ &(4) \quad t \cdot x = d \end{aligned}$$

Zostały ustalone *związki między parametrami.*

Etap trzeci polega na wykryciu, które parametry są istotnie potrzebne do rozwiązania postawionego zagadnienia; w tym celu przeprowadzimy *rugowanie parametrów.* Z równości (1) i (2) wyznaczamy:

$$t_1 = \frac{d}{48}, \quad t_2 = \frac{d}{32}.$$

Wartości te podstawiamy do (3):

$$t = \frac{d}{48} + \frac{d}{32} \quad \text{czyli} \quad t = \frac{5}{96}\, d.$$

Stąd równość (4) daje

$${}^5/_{96}\, d \cdot x = d.$$

Parametr d z natury rzeczy jest odmienny od zera; możemy tedy obie strony ostatniej równości podzielić przez d i otrzymamy

$${}^5/_{96} \cdot x = 1.$$

Doszliśmy do równości, która daje *warunek konieczny* dla parametra x:

$$x = {}^{96}/_5$$

$$\text{czyli} \quad \underline{x = 19{,}2.}$$

Rzućmy jeszcze raz okiem na drogę, którą przebyliśmy przy wyznaczeniu wartości x. Mieliśmy układ równań (1—4) z pięciu parametrami niewiadomemi (d, t_1, t_2, t, x). Układ równań jest to *pytanie,* składające się z dwóch części:

1) *czy istnieją* takie liczby, które po podstawieniu w miejsce niewiadomych parametrów do danych równości czynią im zadość?

2) jeżeli takie liczby istnieją, to *jakie* to są mianowicie liczby?

Rozwiązanie danego układu równań, czyli poszukiwanie odpowiedzi na postawione pytanie, rozłożyliśmy na dwa etapy. Zaczęliśmy od drugiej części pytania, zakładając przedtem, że na pierwszą część pytania odpowiedź wypada twierdząca. Przekonaliśmy się, że przy $d \neq 0$ parametr d (długość całej drogi) wypada z rachunku, i wartość parametra x (wciąż przy założeniu, że taka wartość istnieje) nie zależy od parametra d. Natomiast wyraźnie zależą od parametra d wartości parametrów t_1, t_2, t.

Należy teraz wrócić do pierwszej części pytania, to znaczy, należy sprawdzić, czy istotnie istnieje układ liczb, czyniący zadość postawionym warunkom. Jedyną możliwą wartością x jest 19,2; natomiast d jest dowolne (byle dodatnie). Parametry będą się więc wyrażały w sposób następujący:

$$\begin{aligned} d &\;\text{— dowolne (byle dodatnie)} \\ t_1 &= {}^1/_{48}\, d \\ t_2 &= {}^1/_{32}\, d \\ t &= {}^5/_{96}\, d \\ x &= 19{,}2 \text{ km na godzinę.} \end{aligned}$$

Łatwo teraz sprawdzić, że te wartości parametrów czynią zadość postawionym warunkom.

Dla przykładu weźmiemy dla parametra d jakąkolwiek, dowolną wartość, np. $d = 120$ km. Będziemy mieli wartości parametrów:

$$t_1 = 2{,}5 \qquad t_2 = 3{,}75 \qquad t = 6{,}25$$

Teraz wypiszemy protokół przebiegu w takich warunkach:

„Cyklista jechał z szybkością 24 km na godzinę i w ciągu 2½ godzin przebył 60 km, co stanowiło połowę całej drogi, która wynosiła 120 km. Potem jechał z szybkością 16 km na godzinę i w ciągu $3^3/_4$ godzin przejechał znowu 60 km, czyli drugą połowę drogi. Razem cyklista zużył 6¼ godzin, na co się złożyło $2^1/_2$ i $3^3/_4$ godzin. W powrotnej drodze cyklista zamierza przejechać 120 km w tym samym czasie 6¼ godzin, a więc musi wyrabiać przeciętną szybkość 19,2 km na godzinę."

Protokół jest zgodny w sobie. Warunek znaleziony dla x jest nietylko *konieczny,* ale i *dostateczny* dla uczynienia zadość warunkom zagadnienia.

Zanim przejdziemy dalej, zastanówmy się jeszcze nad rolą parametra d. Mieliśmy układ czterech równań (1—4) z pięciu niewiadomemi (d, t_1, t_2, t, x) i wyznaczyliśmy z tego układu niewiadomą x, natomiast pozostałe niewiadome zostały nieoznaczone. Stało się to dzięki temu, że równania należące do danego układu są *jednorodne* względem tych czterech niewiadomych, to znaczy, że przy zastąpieniu niewiadomych

$$d \qquad t_1 \qquad t_2 \qquad t$$

parametrami do nich *proporcjonalnemi,* np.

$$kd \qquad kt_1 \qquad kt_2 \qquad kt$$

(gdzie k jest liczbą dowolną, byle odmienną od zera), otrzymamy układ równań *równoważny danemu* (t. zn. spełniony przy tych wartościach parametrów, przy których dany układ jest spełniony, a niespełniony przy takich wartościach, przy których dany układ jest niespełniony). Układ jednorodny względem kilku niewiadomych wyznacza co najwyżej *stosunek* tych niewiadomych, np. w danym przypadku

$$d : t_1 : t_2 : t = 1 : {}^1/_{48} : {}^1/_{32} : {}^5/_{96}.$$

Poco tedy wprowadziliśmy taki parametr d, który wypadnie potem z rozważań? Otóż uczyniliśmy to ze względów metodycznych: jeżeli ktoś nie przerabiał zagadnień takiego „typu", jak to, którem się zajmujemy, albo jeżeli zapomniał, jakiego trzeba użyć chwytu, aby je rozwiązać „arytmetycznie", to nastąpi *zahamowanie psychiczne;* niewiadomo, „jak ugryźć" zadanie, — od czego zacząć? Natomiast zadanie stałoby się bardzo łatwe, gdyby była podana długość całej drogi, przebytej przez cyklistę; zahamowania nie byłoby, i możnaby odrazu przystąpić do obliczeń, np. w sposób następujący:

Droga wynosiła 120 km. Na pierwszą połowę drogi, czyli na 60 km, jadąc z szybkością 24 km na godzinę, cyklista zużył

$$60 : 24 = 2\tfrac{1}{2} \text{ godzin.}$$

Na drugą połowę drogi, czyli znowu na 60 km, jadąc z szybkością 16 km na godzinę, cyklista zużył

$$60 : 16 = 3^3/_4 \text{ godzin.}$$

Razem na całą drogę, czyli na 120 km, zużył

$$2^1/_2 + 3^3/_4 = 6^1/_4 \text{ godzin.}$$

W powrotnej drodze musiał jechać z przeciętną szybkością

$$120 : 6\tfrac{1}{4} = 19{,}2 \text{ km na godzinę.}$$

Niestety, w danem zadaniu nie podano długości drogi! Co robić? Będziemy postępowali tak, *jakgdyby* potrzebna wielkość była dana, mianowicie wprowadzamy ją w postaci *parametra.* W ten sposób możemy ułożyć plan rozwiązania zagadnienia jak dla przypadku, gdyby pożądana wielkość była dana. Teraz przychodzi na pomoc *algebra,* która da możność zbadania, czy ten parametr jest istotnie potrzebny do wyznaczenia odpowiedzi na postawione w zadaniu pytanie.

Na początku artykułu wprowadziliśmy nietylko parametr d na oznaczenie długości drogi, ale również parametry czasu: t_1, t_2, t, — i w ten sposób przerzuciliśmy ciężar rozwiązania zagadnienia *na przekształcenia algebraiczne.* Ale możnaby było ograniczyć się do wprowadzenia jednego tylko parametra i dalej postępować drogą „arytmetyczną", wyrażając kolejno potrzebne wielkości przez wybrany parametr i przez dane cyfrowe, które występują w zadaniu. Tym parametrem wybranym mogłaby być

w danem zadaniu niekoniecznie długość d, ale np. czas t_1. Rozumowanie byłoby następujące:

Jadąc z szybkością 24 km na godzinę, cyklista w ciągu t_1 godzin przebył $t_1 . 24$ km na godzinę, co stanowi połowę drogi.

Drugą połowę drogi cyklista przebył, jadąc z szybkością 16 km na godzinę w ciągu

$$t_1 . 24 : 16 = {}^3/_2\, t_1 \text{ godzin.}$$

Razem zużył na całą drogę

$$t_1 + {}^3/_2\, t_1 = {}^5/_2\, t_1 \text{ godzin.}$$

Cała droga wynosiła

$$t_1 . 24 + t_1 . 24 = t_1 . 48 \text{ km.}$$

W powrotnej drodze musiał jechać z przeciętną szybkością

$$(t_1 . 48) : {}^5/_2\, t_1 = 48 \times {}^2/_5 = 19{,}2 \text{ km na godzinę.}$$

Podobnież możnaby było wybrać parametr t_2, ale już parametr t byłby niedogodny, gdyż trudno byłoby wpaść na myśl, że jego składniki t_1 i t_2 są odwrotnie proporcjonalne do danych szybkości 24 km na godzinę i 16 km na godzinę, mianowicie

$$t_1 : t_2 = {}^1/_{24} : {}^1/_{16}.$$

Umiejętność wybrania dogodnych parametrów jest rzeczą sztuki, którą się zdobywa przez doświadczenie. Możemy podać taką wskazówkę, dotyczącą *wyboru parametrów:* układ parametrów musi być *dostateczny* do wyznaczenia całości zagadnienia. (Podkreślamy „dostateczność" układu, nie troszcząc się o jego konieczność, gdyż kwestja konieczności wybranych parametrów rozstrzygnie się przy analizie algebraicznej danego zagadnienia.) Wybór dostatecznego, choćby nadmiernego, układu parametrów przerzuca trudności rozwiązania zadania na *technikę algebraiczną.* Rachunki algebraiczne zacierają jednak konkretne zrozumienie poszczególnych etapów rozwiązania. Ostateczny wynik wywołuje zdziwienie, które jest źródłem ciekawości: jaki jest związek między szybkościami danemi a szybkością wynikową?

Tu przechodzimy do czwartego etapu zagadnienia — do *interpretacji* rozwiązania danego zagadnienia. Interpretacja rozwiązania zagadnienia, czyli jego wyrozumowanie albo wytłomaczenie, polega na zarytmetyzowaniu przebiegu rozwiązania, czyli na takiem jego przedstawieniu, aby można było kolejne etapy rozwiązania przedstawić bez aparatu algebraicznego.

W danem zagadnieniu przeprowadzimy interpretację tego rozwiązania, które się opiera na wyrażeniu kolejnych parametrów przez parametr t_1, to znaczy przez czas potrzebny do przebycia pierwszej połowy drogi z szybkością 24 km na godzinę. Ponieważ szybkość w drugiej połowie jest w stosunku 2 : 3 do szybkości w pierwszej połowie drogi, przeto czas zmieni się w stosunku 3 : 2, a więc na drugą połowę drogi potrzeba $^3/_2$ tego czasu, który był potrzebny na pierwszą połowę drogi. Na przebycie całej drogi potrzeba $^5/_2$ tego czasu, który był potrzebny na przebycie pierwszej połowy drogi. Jeżeliby cyklista jechał *całą drogę z jednakową szybkością*, to na przebycie którejkolwiek połowy drogi potrzebowałby $^5/_4$ tego czasu, który był potrzebny na przebycie pierwszej połowy drogi; jeżeli tedy czas zmienił się w stosunku 5 : 4, to szybkość zmieni się w stosunku 4 : 5, a więc przy jednakowej szybkości jazdy na całej drodze powrotnej w takim samym czasie, jak przy jeździe „w tamtą stronę", cyklista będzie wyrabiał $^4/_5$ szybkości 24 km na godzinę, czyli ostatecznie — 19,2 km na godzinę!

Jeżelibyśmy za podstawę przyjęli czas t_2 potrzebny do przebycia drugiej połowy drogi, to na pierwszą połowę drogi — przy szybkości zmienionej w stosunku 3 : 2 — przypada $^2/_3$ tego czasu, a na całą drogę przypadnie $^5/_3$ czasu potrzebnego na drugą połowę drogi. Przy jednakowej na całej drodze szybkości — na połowę drogi potrzebaby było $^5/_6$ tego czasu, który był potrzebny do przebycia drugiej połowy drogi, a więc w powrotnej drodze cyklista musi robić $^6/_5$ szybkości 16 km na godzinę, czyli ostatecznie znowu 19,2 km na godzinę!

W ten sposób rozwiązanie zagadnienia zostało *zarytmetyzowane*. Zauważmy mimochodem, że oparliśmy je na pojęciu *stosunku*, które dziś jest lekceważone i zaniedbywane przy nauczaniu, opartem na formalnych przekształceniach algebraicznych.

Wreszcie przychodzi piąty i ostatni etap rozwiązania zagadnienia: *dyskusja koniecznych i dostatecznych warunków możliwości zagadnienia* przy danych, oznaczonych parametrami.

W danem zagadnieniu wynikowa szybkość v wyraża się wzorem

$$v = \frac{2\,v_1\,v_2}{v_1 + v_2}.$$

Że wzoru tego widzimy, że funkcja v zawsze istnieje, skoro wartości v_1 i v_2 z natury zagadnienia są dodatnie. Ze stanowiska matematycznego niema poza tem żadnych ograniczeń dla wartości parametrów v_1 i v_2, jedynie względy rzeczowe mogłyby nakazać odrzucenie szybkości zbyt małych lub zbyt wielkich.

Intuicyjnie czujemy, że wynikowa szybkość v musi być pośrednia między danemi szybkościami v_1 i v_2. Łatwo to sprawdzić w postaci ogólnej.

Uwaga. Zakładając, że

$$b > a > 0,$$

możemy wzór

$$h = \frac{2\,ab}{a + b}$$

doprowadzić do postaci proporcji

$$(h - a) : (b - h) = a : b.$$

Proporcja taka nazywa się proporcją *harmoniczną*, a liczba h nazywa się *średnią harmoniczną* między liczbami a i b.

Widzimy więc, że w rozwiązanem zagadnieniu szybkość wynikowa v jest średnią harmoniczną między szybkościami danemi v_1 i v_2.

Wzór na średnią harmoniczną można przekształcić:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Wynika stąd, że odwrotność średniej harmonicznej dwóch liczb (dodatnich) jest średnią arytmetyczną odwrotności obu tych liczb. Zauważmy też, że ze wzoru

$$\frac{2\,ab}{a + b} : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : \frac{a + b}{2}$$

wynika, że średnia proporcjonalna (średnia geometryczna) dwóch liczb (dodatnich) jest też średnią proporcjonalną między ich średnią harmoniczną i średnią arytmetyczną.

Jeżeli dane liczby (dodatnie) są *nierówne*, to ich średnie idą w następującym porządku *malejącym;* średnia arytmetyczna, średnia proporcjonalna, średnia harmoniczna.

* * *

Zreasumujemy powyższe rozważania nad algebraiczną metodą rozwiązywania zagadnień.

Jeżeli nie możemy danego zagadnienia rozwiązać arytmetycznie albo jeżeli ułożenie równań sprawia trudności, to wprowadzamy tyle parametrów, aż nastąpi *nasycenie parametrami*, to znaczy, aż się zarysuje możliwość wypisania związków między danemi w zagadnieniu i wprowadzonemi parametrami, z których jeden lub kilka przedstawiają poszukiwane w danem zagadnieniu niewiadome. Potem wypisujemy *równania*, prowadzące do rozwiązania zagadnienia.

Przy *rozwiązywaniu równań* może się okazać, że wprowadzone parametry odegrały tylko rolę pomocniczą, ale może też wyjść najaw *brak istotnego parametra*, potrzebnego do wyznaczenia rozwiązania.

Po rozwiązaniu zadania można robić próby *arytmetycznej interpretacji* rozwiązania zagadnienia. Wreszcie należy przeprowadzić *dyskusję warunków możliwości* zagadnienia w przypadku, gdy dane, wyznaczające zagadnienie, mają postać parametrów.

Wyróżniliśmy tedy pięć etapów w rozwiązywaniu zagadnień. Częstokroć jest rzeczą ciekawą *uogólnienie* danego zagadnienia, ale to nie należy do rozwiązania zagadnienia, gdyż jest postawieniem *nowego* zagadnienia — ogólniejszego.

Z DAWNYCH LAT.

JAN SNIADECKI (1756—1830). [8]

Ktokolwiek przestawszy choć na moment bydź Uczniem ludzi, stał się uczniem doświadczenia,

ieżeli był kiedy szczęśliwym choć naypotocznieyszą prawdę sam przez się odkryć, niżeli ią od kogo słyszał,

wróciwszy się uwagą na drogę swego wynalazku dostrzegł zapewne,

że iego prawdę poprzedzić musiała w umyśle iasna przytomność rzeczy iemu przedtem dobrze znanych,

do których potem przypadek iaki lub reflexya zbliżywszy obrazy inne albo zbłąkane w iego pamięci, albo przywiązane do innych iakich myśli, dały mu ie zrównać z wiadomemi i przytomnemi na ten czas:

w tem porównaniu pokazał się nowy związek między iego myślami, z którego powstała prawda świeżo przez niego odkryta.

Przyszedł więc od rzeczy znanych do nieznanych przez porównanie obrazów iakim przypadkiem lub reflexyą do siebie zbliżonych.

Wszystkie wynalazki począwszy od naygrubszych sztuk i rękodzieł aż do naywyższych umieiętności ten sam miały początek.

Wyjęte z dzieła pod tytułem:

RACHUNKU ALGEBRAICZNEGO
TEORYA
Przystosowana do Geometryi Linii Krzywych
przez
J. P. SNIADECKIEGO
w Szkole Główney Koronney Matematyki wyższey i Astronomii Professora, teyże Szkoły Sekretarza, w Krakowie w Drukarni Szkoły Główney 1783.

(Tom I, str. 1.)

WIADOMOŚCI. [9]

= OKÓLNIK P. Ministra W. R. i O. P. z dnia 3 sierpnia 1929 r. *w sprawie zmian w materjale nauczania w siedmioklasowych szkołach powszechnych i gimnazjach państwowych w roku szkolnym 1929/30* wraz z obszerną instrukcją — ukazał się w Dzienniku Urzędowym Ministerstwa W. R. i O. P., rok XII, Nr. 8 (215), pozycja 113.

Okólnik ten wywołał pewne nieporozumienia, które stwierdziliśmy w rozmowach z Nauczycielami i Inspektorami Szkolnymi. Chcemy tu podać kilka uwag, zaznaczając jednak, że nie będą one miarodajną wykładnią instrukcji i okólnika, która z natury rzeczy mogłaby wyjść jedynie z Ministerstwa.

Główne źródło nieporozumień leży w tem, że niektórzy uważają zmiany w materjale nauczania, nakazane *na jeden tylko rok szkolny*, za bezpośredni wyraz zamierzeń programowych Ministerstwa na przyszłość, co jest oczywiście błędem. Trzeba sobie wyraźnie uświadomić, że obecnie nakazane zmiany w materjale nauczania są doraźne i mają charakter tymczasowy. W gimnazjum zaczęto wprowadzać takie doraźne zmiany w nauczaniu matematyki już w drugiem półroczu roku szkolnego 1928/29 w związku z zarządzeniem Ministra z dnia 2. I. 1929. O ile chodzi o szkołę powszechną, w której program dotychczas nie uległ zmianie, materjał nauczania w każdym oddziale (z wyjątkiem oczywiście I-go) został na rok szk. 1929/30 zmieniony przy założeniu, że dzieci, które uczęszczają do tego oddziału, uczyły się w oddziale poprzednim aż do końca roku szk. 1928/29 według dawnego programu. Chodziło przytem, jak widać, głównie o niezwłoczną redukcję materjału, która stanowi zagadnienie już dawno dojrzałe. Jakkolwiek będzie postawiona sprawa materjału nauczania na przyszły rok szkolny (1930/31), — czy ukaże się nowe zarządzenie Ministerstwa, regulujące tę sprawę na jeden tylko rok szk., czy też będzie stopniowo wprowadzany nowy program nauczania w siedmioklasowych szkołach powszechnych i gimnazjum niższem (który jest w opracowaniu), w każdym razie jest rzeczą oczywistą, że materjał, który obowiązuje w bieżącym roku szk. w którymkolwiek oddziale, np. w oddziale VI, nie będzie obowiązywał w tym samym oddziale na przyszły rok szk. — dla tej prostej przyczyny, że do tego oddziału będą uczęszczały dzieci, których przygotowanie nie będzie już odpowiadało wymaganiom dawnego programu, ale wymaganiom zredukowanym przez omawiane zarządzenie.

Jeżeli tedy np. ktoś zwraca uwagę na to, że w materjale dla oddziału IV jest „wprowadzenie pojęcia procentu i obliczanie procentów danej liczby całkowitej", i martwi się tem, że ani w tym, ani w następnych oddziałach niema wzmianki o zastosowaniu %% do zagadnień handlowych i statystycznych, albo sądzi, że i na przyszłość pojęcie % będzie występowało tylko w programie oddziału IV, i to pod sam koniec roku, to — miejmy nadzieję — martwi się przedwcześnie: w przyszłym roku szk. zagadnienie procentów może się ukazać w wyższych oddziałach, i to w postaci dostatecznie rozwiniętej. Uważne przyjrzenie się okólnikowi i instrukcji musi doprowadzić do wniosku, że zmiany doraźne zostały dokonane w drodze redukcyj *na gruncie dawnego programu*, który obowiązywał jeszcze do końca roku szk. 1928/29, — i nie leżało w linji zamierzeń Ministerstwa dokonywanie zmian przez wprowadzenie *nowych działów* dla któregokolwiek rocznika. Z zasadniczemi zmianami należy zaczekać do zakończenia prac Ministerstwa nad budową nowego programu; wtedy dopiero stanie przed Nauczycielstwem trud poznania i realizowania nowych planów nauczania; w tym roku szkoła nie przeżywa wstrząsu, gdyż program został dawny, znany od dziesięciu lat, i trzeba w nim dokonać jedynie pewnych redukcyj.

Przechodzimy do uwag szczegółowych, przyczem omówimy tylko zmiany znaczniejsze lub źle rozumiane.

Szkoła powszechna.

W oddziale II skreślono punkt C. 3: „Doliczanie i odliczanie kompleksów (od 1 do 100)"; jest to wyrównanie niekonsekwencji, gdyż punkt C. 3 musiał się opierać na punkcie C. 4: „Doliczanie liczby dwucyfrowej do najbliższej dziesiątki". Zresztą dodawanie równych składników wystąpi siłą rzeczy w punkcie D. 1 przy układaniu tabliczki mnożenia.

Pozatem w oddziale II ograniczono materjał o ułamkach do rozważania jedynie „połowy", a usunięto „ćwierć" wraz z odpowiedniemi częściami jednostek miary. Szczególnie podkreślić należy usunięcie pojęcie kąta jako odpowiedniego obrotu. Pozostawiono jedynie „kąt prosty". Ponieważ nie może tu być mowy o definicji kąta prostego, przeto wystarcza danie dzieciom do ręki modelu kąta prostego; model taki dzieci same mogą otrzymać przez dwukrotne zgięcie kartki papieru (ob. Dr. Ludwika Jeleńska. Metodyka pierwszych lat nauczania. Stronica 213).

W oddziale III odpada „odliczanie kompleksami, jak w Od. II", natomiast zjawia się wyraźnie „dzielenie przez 10, 5, 2, 4, 8, 3, 6, 9, 7", poczem następuje, jak dawniej, dzielenie przez 100, 50, 20, 40, 80, 30, 60, 90, 70.

Działania na ułamkach w dziale E oddziału III zostały zredukowane przez podanie zakresu: „Działania na ułamkach z mianownikami 2, 4, 3, 6, 12"; poza tem usunięto „część części, połowa połowy i t. p.".

W materjale geometrycznym oddziału III usunięto „pole trójkąta" i „pomiar pól figur prostokreślnych" (czyli pola wielokątów), ale zato nakazano zrobić „opracowanie pola kwadratu i prostokąta", które nie mogło być dostatecznie ugruntowane w oddziale II. Dobrze się też stało, że odciążono oddział III przez wyrzucenie punktu: „Objętość i powierzchnia prostopadłościanów i graniastosłupów o wielobocznej podstawie". Zwracamy przytem uwagę na to, że skreślenie tego zdania, które było niedość zręcznie sformułowane, usuwa tylko rozważania graniastosłupów, gdyż „powierzchnia i objętość prostopadłościanu" były już przedtem opracowane. Wreszcie usunięto z oddziału III „kątomierz" i „stopień".

W oddziale IV dodano w dziale A wyraźnie przeoczone przez program „rozszerzenie zakresu liczb do 10 000". W dziale B należy ograniczyć się do metod działań pisemnych w zakresie liczb czterocyfrowych, gdyż dopiero w dziale C po słowach: „rozszerzenie zakresu liczb poza liczby czterocyfrowe" okólnik dodaje: „i ugruntowanie metod działań piśmiennych na liczbach w rozszerzonym zakresie".

Znacznie został zmniejszony materjał, dotyczący działań na liczbach ułamkowych, a to wskutek usunięcia trudnych pojęć mnożenia przez ułamek i dzielenia przez ułamek. W dziale D, który jest poświęcony 4 działaniom na ułamkach dziesiętnych, w punkcie D. 3 ma być „uwielokrotnianie (mnożnik całkowity)", a w punkcie D. 4: „dzielenie na równe części (dzielnik całkowity)". Zato okólnik kładzie nacisk na konieczność należytego uwzględnienia w oddziale IV również i ułamków zwyczajnych; sprawę tę podnosi specjalna uwaga przy omawianiu działu E.

W oddziale V dokonano na programie znacznego obcięcia przez skreślenie całego działu B, poświęconego t. zw. „liczbom ogólnym", ale zato okólnik znowu podnosi konieczność należytego opracowania działań na ułamkach zwyczajnych, nie zadowala się bowiem w punkcie A. 3 „powtórzeniem działań na ułamkach zwyczajnych w zakresie, określonym przez programy poprzednich oddziałów", ale każe przerobić „systematyczne opracowanie czterech działań na ułamkach". Ponieważ nakazano powtórzyć działania na ułamkach *zwyczajnych* — i to w zakresie określonym przez programy kilku lat, a przy słowach „systematyczne opracowanie czterech działań na ułamkach" niema słowa „zwyczajnych", przeto jasnem jest, że w oddziale V muszą być systematycznie opracowane zarówno działania na ułamkach zwyczajnych, jak i na ułamkach *dziesiętnych*. Dzięki skreśleniu całego działu B, będzie na to więcej czasu.

Z materjału geometrycznego w oddziale V wyrzucono rozważania t. zw. „prostego" ostrosłupa trójkątnego i kwadratowego, dalej — t. zw. „ostrosłupa pochyłego", graniastosłupa ściętego oraz graniastosłupów i ostrosłupów „prostych" o wielokątnej podstawie. (Nie możemy się tu powstrzymać od uwagi, że nie żałowalibyśmy również „graniastosłupa kwadratowego pochyłego" i „równoległościanu" — w przypadku, gdyby i one dostały się pod nóż redukcji!)

Przy skreślaniu działów G i H w programie geometrji na oddział V padły też ofiarą „wielokąty foremne, kreślenie, symetrja". Pocieszamy się tem, że wiadomości o wielokątach foremnych, a także elementy symetrji dlatego zostały skreślone, że oddział V był przeciążony, ale zostaną zapewne uwzględnione dla tegoż rocznika dzieci w przyszłym roku szkolnym w kursie oddziału VI.

W oddziale VI zostały zachowane diagramy (wykresy) empiryczne, ale usunięto ich przykład szczególny w punkcie B. 2: „Diagramy cen biletów kolejowych i t. p., gdzie zależność dwu zmiennych wyraża się przez wzór prosty (interpolacja i ekstrapolacja)". Przykład ten był nieaktualny, gdyż cena biletu nie wyraża się wzorem $y = ax + b$, jak prawdopodobnie domniemywał program, a poza tem nawet empiryczne traktowany wykres cen biletów kolejowych daje obraz trudny do wykonania. Wyrzucenie t. zw. „ekstrapolacji" należy powitać z żywem zadowoleniem.

W punkcie B. 3 zredagowano wzory zgodnie z powszechnie przyjętemi zwyczajami.

Wreszcie z oddziału VI wyrzucono cały dział C: „Liczby względne".

W materjale geometrycznym oddziału VI usunięto działy D i E: „Siatka i model pnia ostrosłupowego. Podobieństwo figur. Siatki i modele tej samej bryły w różnych skalach." Nie znaczy to jednak, by zagadnienia podobieństwa figur i podobieństwa brył odpadły, gdyż w dziale H przy omawianiu „pomiaru pól, powierzchni i objętości" dodano: „*z uwzględnieniem skali*", skąd wniosek, że musi tu znaleźć miejsce zarówno pojęcie figur podobnych, jak i pojęcie brył podobnych. Zmniejszenie materjału sprowadza się więc do ograniczenia rozważań teoretycznych oraz usunięcia nadmiaru ćwiczeń w budowaniu modeli brył. Również i w dziale F skreślono tytuł: „Kąty bryłowe (suma kątów płaskich)", dający wiadomości o charakterze teoretycznym.

W oddziale VII — rozwiązywanie układów równań pierwszego stopnia ograniczono do dwóch niewiadomych (dział B). Skreślono całe działy C i D: „Diagramy funkcji $x = y^2$. Równania stopnia drugiego z jedną niewiadomą". Jest nadzieja, że te działy, podobnie jak i dział o liczbach względnych, już nie wrócą do programu szkoły powszechnej (jak niema ich w gimnazjum niższem)!

W programie geometrji dla oddziału VII pozostały dwie odmiany: „A" i „B", ale uproszczono je, szczególnie program „B", gdzie usunięto dział C: „Przekroje brył płaszczyzną prostopadłą do jednej z płaszczyzn rzutu", przyczem zostało szczęśliwie zlikwidowane „szczególne uwzględnienie przekrojów stożka". Należy jednak zaznaczyć, że metoda przekrojów, niezmiernie pożyteczna przy szkicowaniu technicznem, jest uwzględniona w dziale E, okólnik bowiem po słowach „Model techniczny (szafa, stół i t. p.) w trzech rzutach" poleca dopisać: „Użycie przekrojów dla podania szczegółów". Można to rozumieć tak, że przekroje brył mają być traktowane przedewszystkiem praktycznie, jako środek techniczny.

Programy „A" i „B" zostały zbliżone do siebie przez to, że obliczanie ciężaru właściwego obowiązuje teraz w obu programach.

G i m n a z j u m.

Program matematyki w gimnazjum niższem nie uległ w tym roku zmianie. Mimo to nastąpiło zbliżenie programu dwu typów szkół wskutek zmniejszenia nadmiaru wybujałego materjału nauczania w wyższych oddziałach szkoły powszechnej.

W zakresie materjału nauczania matematyki w różnych wydziałach gimnazjum wyższego ograniczymy się do zanotowania doniosłej zmiany programu: w bieżącym roku szkolnym w żadnej klasie niema t. zw. *geometrycznej teorji odcinków proporcjonalnych*. Usunięto tę teorję z klasy V wydziału mat.-przyrodn. i wydziału hum. (w wydziale klasycznym i tak jej nie było). Nasuwa się pytanie, jak to będzie w roku przyszłym w klasie VI: czy trzeba będzie zacząć odrazu *od teorji metrycznej* (co przy stosowaniu istniejących podręczników pociągnie za sobą trudności, jakie zresztą były w wydziale klasycznym), czy też na nowo przywrócona będzie teorja geometryczna — „rediviva"? Wyrażamy nadzieję, że jednej teorji odcinków proporcjonalnych — mianowicie *miarowej* — zupełnie wystarczy do wykształcenia matematycznego, a nauczyciele i młodzież będą zwolnieni od trudu dwukrotnego przerabiania nauki o odcinkach proporcjonalnych!

W związku z pominięciem geometrycznej teorji proporcyj odcinkowych opuszczono w kursie klasy V twierdzenie D e s a r g u e s'a, na którem program, a za nim i podręczniki, opierały ową teorję.

Jesteśmy w okresie reorganizacji programów. Dla szkoły powszechnej ten bolesny okres dopiero się zaczyna. Jest on koniecznością zarówno ze względu na dojrzałą oddawna potrzebę zmniejszenia wymagań programowych, jak i ze względu na podjętą unifikację szkolnictwa elementarnego. Miejmy nadzieję, że okres ten nie będzie trwał zbyt długo. Oby przeżycie gorączki reformacyjnej przyniosło dobre owoce!

= KOMISJA PEDAGOGICZNA Ministerstwa W. R. i O. P. — Oddział metodyki fizyki i chemji. — W roku 1927 został wydany tom prac Komisji p. t. „Fizyka i chemja w szkole. Tom I." W roku 1929 ukazał się zeszyt 1 tomu III, którego treścią jest „Fizyka współczesna". Aczkolwiek metodyka nauczania fizyki i chemji nie leży w programie „Parametra", pozwalamy sobie zwrócić uwagę Czytelników na te niezwykle cenne dzieła.

KRONIKA. [10]

= KONGRES Matematyków Krajów Słowiańskich odbył się pod honorowym protektoratem Pana Prezydenta Rzeczypospolitej, a pod prezydencją prof. dr. Wacława S i e r p i ń s k i e g o w Warszawie w dn. 23—27. IX. 1929. Na kongres przybyli przedstawiciele Bułgarji, Czechosłowacji i Jugosławji, poza tem byli przedstawiciele emigracji rosyjskiej. Gości z ZSSR nie było, gdyż rząd sowiecki stanął na stanowisku, że obywatele ZSSR nie mogą brać udziału w zjazdach regjonalnych, opartych na zasadzie narodowej, a nie międzynarodowej. Z krajów niesłowiańskich przybyli goście z Rumunji, Rzeszy Niemieckiej, Austrji, Holandji i Japonji. Z Anglji przybył na zaproszenie Kongresu W. H. Y o u n g, prezes Międzynarodowej Unji Matematycznej.

Na Kongresie Matematyków Krajów Słowiańskich nie było specjalnej sekcji dydaktyki matematyki (jaka była na Pierwszym Polskim Zjeździe Matematycznym we Lwowie 1927). Zagadnienia dydaktyczne zostały przydzielone do Sekcji I (Podstawy matematyki, Historja, Dydaktyka matematyki). To też komunikaty, dotyczące spraw nauczania matematyki, były nieliczne, co jest zrozumiałe ze względu na międzynarodowy charakter Kongresu.

Prof. S. D i c k s t e i n wygłosił bardzo ciekawy odczyt pod tytułem: *„Przyczynek do biografji Lhuillier'a (1750—1840)"*. Mamy nadzieję, że niebawem będziemy mieli sposobność przeczytania tego odczytu w druku. — Prof. dr. A. Ł o m n i c k i podał komunikat p. t. *„Uwagi o geometrycznej analizie zadań konstrukcyjnych"*.

W Sekcji IV (Geometrja) p. Mara P o p o v a z Sofji wygłosiła komunikat p. t. *„La géométrie dans la broderie bulgare"* (O geometrji w haftach bułgarskich).

Zakończenie Kongresu odbyło się w Poznaniu z racji Powszechnej Wystawy Krajowej. Na posiedzeniu plenarnem dr. Otton N i k o d y m wygłosił odczyt p. t.: *„Znaczenie matematyki czystej dla społeczeństwa"*. Odczyt ten został wydrukowany w Przeglądzie Pedagogicznym T. N. S. W. w Nr. 29 z dnia 26. X. 1929 (str. 697—700).

= ODCZYT dra Bronisława K n a s t r a, docenta Un. Warsz., na posiedzeniu Sekcji Mat. T. N. S. W. w Warszawie, 23. X. 1929, p. t. *„Co dają geometrji badania topologiczne?"*

Po krótkiem przedstawieniu etapów rozwojowych geometrji i powstawania nowych jej gałęzi w związku z pojawianiem się nowych metod badania i uogólnieniami pojęcia przestrzeni, Referent przytacza zagadnienia zarówno klasyczne (ustalenie takich pojęć, jak wymiar, linja, powierzchnia...), jak współczesne (pojęcie miary, równoważność figur przez rozkład na skończoną liczbę części przystających, struktura figur ze względu np. na rozmieszczenie w nich punktów rozgałęzienia), które mogły być rozwiązane *w całej ogólności* dopiero dzięki zastosowaniu teorji mnogości. Po określeniu najprostszych pojęć teorji mnogości punktowych, jak zbioru zamkniętego, otwartego, brzegu, spójności, continuum, łuku etc., Referent podaje zapomocą tych pojęć definicję wymiaru M e n g e r a - U r y s o h n a, linji, powierzchni i wogóle t. zw. rozmaitości *n*-wymiarych w sensie C a n t o r a, niemetryczną charakterystykę płaszczyzny euklidesowej (J a n i s z e w s k i, K u r a t o w s k i) i ciągłych obrazów odcinka (M a z u r k i e w i c z, H a h n), a w zakresie zagadnień nowszych wzmiankuje o wynikach B a n a c h a i T a r s k i e g o w dziedzinie teorji miary i rozkładów skończonych, o krzywej S i e r p i ń s k i e g o, złożonej z samych punktów rozgałęzienia, i o krzywych bez łuków (J a n i s z e w s k i, K n a s t e r).

Metody teorji mnogości wniosły więc zdaniem Referenta przedewszystkiem nieznaną przedtem *ogólność*, następnie, prócz rozwiązania szeregu zagadnień podstawowych, dały *odkrycia figur nowych*, oraz *nowych własności figur znanych*, i pogłębiły naszą wiedzę o ich *strukturze*, wreszcie przyczyniły się do logicznie ściślejszego zbudowania podstaw tego działu matematyki.

W dyskusji poruszono sprawę celowości stosowania terminu „miejsce geometryczne" zamiast „zbioru wszystkich punktów, posiadających daną własność".

= ODCZYT dra S. Straszewicza, profesora Politechniki Warsz., na posiedzeniu Sekcji Mat. T. N. S. W. w Warszawie, 20. XI. 1929, p. t. *„O pojęciu zwrotu kątów na płaszczyźnie"*.

Referent zaczął od ustalenia pojęcia zwrotu dla obiegu obwodu trójkąta. Możność ustalenia tego pojęcia wynika z twierdzenia: *Jeżeli będziemy rozważali na płaszczyźnie uporządkowane trójki punktów ABC (przyczem punkty, należące do trójki, nie leżą na jednej prostej), to wszystkie takie trójki można podzielić na dwie klasy, spełniające warunki: 1) trójki ABC i BCA należą do tej samej klasy, 2) trójki ABC i BAC należą do różnych klas, 3) trójki ABC i ABD należą do tej samej klasy, jeżeli C i D leżą po tej samej stronie prostej AB, a należą do różnych klas, jeżeli C i D leżą po przeciwnych stronach prostej AB.* Trójkom jednej klasy można przypisać liczbę (+ 1), trójkom zaś drugiej klasy (— 1). Podany podział trójek na klasy jest jednoznaczny; można jedynie przemienić podział liczb (+ 1) i (— 1). Twierdzenie powyższe możnaby nazwać twierdzeniem o dwustronności płaszczyzny.

W ścisłym związku z podziałem trójek punktów na klasy jest wprowadzenie pojęcia zwrotu kątów na płaszczyźnie. *Jeżeli kątem ab nazwiemy układ dwóch promieni a i b, mających wspólny początek i nie leżących na jednej prostej, to można podzielić wszystkie kąty na płaszczyźnie na dwie klasy o własnościach następujących: 1) kąty ab i ba należą do różnych klas, 2) jeżeli promień a_2 zawiera się w promieniu a_1, to kąty a_2b i a_1c należą do tej samej klasy, jeżeli promienie b i c leżą po tej samej stronie prostej, na której leżą promienie a_1 i a_2, natomiast kąty a_2b i a_1c należą do różnych klas, jeżeli promienie b i c leżą po przeciwnych stronach owej prostej.* (Warunek 2 jest ważny i w tym przypadku, kiedy promień a_2 jest identyczny z promieniem a_1.) Referent naszkicował dowód tego twierdzenia, oparty na pewnikach I i II grupy układu pewników D. Hilberta, t. zn. na pewnikach przynależności i uszeregowania.

Rozważania analogiczne mogą być przeprowadzone dla przestrzeni trójwymiarowej i wielowymiarowej.

= ODCZYT dra K. Cwojdzińskiego na posiedzeniu Sekcji Mat. T. N. S. W. w Poznaniu, 15. XI. 1929, p. t. *„Tworzenie równań kwadratowych o parametrze zmiennym, mających pierwiastki rzeczywiste w obszarze ograniczonym przez liczby wymierne"* — podajemy w niniejszym zeszycie „PARAMETRA" w artykule [6].

ODEZWA REDAKCJI: Redakcja prosi PP. Kolegów, pracujących w różnych organizacjach nauczycielskich, o nadsyłanie sprawozdań z posiedzeń, na których były omawiane sprawy, dotyczące nauczania matematyki.

BIBLJOGRAFJA. [11]

= LÎLÂVATÎ | Rozrywki Matematyczne | Zebrał i opracował | Inż. S. Jeleński | Z 172 rysunkami w tekście | i jedną tablicą | Nakładem Księgarni św. Wojciecha | Poznań — Warszawa — Wilno — Lublin |

For. 21½ × 14. Str. XII + 300. Cena zł 6,50; w opr. zł 7,50.

Rozdziały: I. Anegdoty i zadania anegdotyczne. — II. Ciekawe właściwości liczb i działań mat. — III. Figury magiczne. — IV. Pseudarja. — V. Odgadnienia. — VI. Z tajników szachownicy, kart i domina. — VIII. Gry, zabawy, łamigłówki, sztuki i figle magiczne.

= ŚLADAMI PITAGORASA | Rozrywki Matematyczne | Zebrał i opracował | Inż. S. Jeleński | Z 285 rysunkami w tekście | i jedną tablicą | Nakładem Księgarni św. Wojciecha Poznań — Warszawa — Wilno — Lublin |

For. 21½×14. Str. XII+424. Cena zł 10.—; w opr. zł 11,50.

Rozdziały: I. Pitagoriana. — II. Calendaria. — III. O układach numeracji odmiennych od dziesiątkowego. — IV. Liczby-olbrzymy i liczby-liliputy. — V. Ciekawe właściwości liczb i działań mat. — VI. Matematyka w żywej przyrodzie. — VII. Figury magiczne. — VIII. Odgadnienia. — IX. Liczba i tajemnica. — X. Geometrja kartki giętej i rżniętej tafelki. — XI. Liczydła. — XII. Wielkie i małe problemy historyczne. — XIII. Zadania anegdotyczne. — XIV. Gry, zabawy i łamigłówki. — XV. Figle i żarciki mat. — Bibljografja.

Obie książki p. Szczepana Jeleńskiego czyta się z przyjemnością i wyraźną sympatją dla Autora. Nie mogłoby być inaczej: zapał i entuzjazm, tchnący z każdej stronicy, ujmuje i pociąga. Niema dla Autora w rozważanych tematach rzeczy obojętnych: każda zasługuje na pełne zainteresowanie — zarówno wielkie prawdy matematyczne, genjalne odkrycia, jak i drobne fakciki, własności nieledwie banalne — wszystko jest godne uwagi, wszystko jest nadzwyczajne, „pełne czaru", dziwne, niezwykłe; liczby są „tajemnicze i wspaniałe", dziewiątka jest „bardzo miłą cyfrą". Roi się w obu książkach od takich przymiotników, szczerze wypływających z pod pióra p. Jeleńskiego, a odzwierciadlających jego uczuciowy stosunek do omawianych tematów.

Przy czytaniu dziełek p. Jeleńskiego wspomina się szczerość matematyków XVII i XVIII w., z nieskończonym zapałem witających każde odkrycie — duże czy małe. Wszak i w XIX w. jeszcze nie wahał się wielki Gauss — chłodny i zamknięty w sobie Gauss — nazwać swego twierdzenia o resztach kwadratowych złotem twierdzeniem — *theorema aureum*, a twierdzenia o niezmienności krzywizny powierzchni twierdzeniem wybornem — *theorema egregium*. Obecnie żenowaliby się matematycy dawać w druku wyraz swym wzruszeniom — wykładają swe badania sucho i objektywnie. Obce zbiorki rozrywek matematycznych (np. Dr. W. Ahrens: Mathematische Spiele) cechuje również ton rzeczowy i chłodny.

P. Jeleński, wiedziony trafną intuicją, pojął, że w ten sposób nie trafi się do serc i mózgów młodzieży, że magnesem przyciągającym może być tutaj jedynie entuzjazm autora, który zawsze porwie czytelników i natchnie ich swojemi poglądami, nie ukrywał więc ani swych wzruszeń i uczuć, ani przekonania o roli, jaką mogą spełnić rozrywki matematyczne. „Czytelnicy, — pisze — wyostrzywszy na nich swą bystrość, pojętność, pomysłowość, do wszelkiej pracy się nadadzą i wszędzie zawsze będą właściwymi ludźmi na właściwem miejscu." Dał nam też p. Jeleński książki świeże i młodzieńcze, za co winna mu specjalną wdzięczność nietylko młodzież, ale i nauczyciele matematyki.

Obie książki są wydane z pietyzmem.

Stefan Kulczycki (Warszawa).

= WACŁAW SIERPIŃSKI | Profesor Uniwersytetu Warszawskiego | Wstęp do Teorji mnogości | i Topologji | Lwów 1930 | Nakład i własność K. S. Jakubowskiego | Spółki z ogr. odp. |

For. 20 × 14. Str. 119 + 1°. W nagłówku: Monografje i podręczniki. Tom X. — Cena zł 6.—.

Rozdziały: I. Liczby kardynalne. — II. Zbiory uporządkowane. — III. Zbiory punktowe.

Od stworzenia teorji mnogości przez G. Cantora upłynęło już około pół wieku. Przez ten czas zdołała ona nietylko rozwinąć się potężnie, ale uzyskała również ogromny wpływ na rozwój całego szeregu podstawowych działów matematyki. Możnaby powiedzieć, że najbardziej charakterystycznym procesem w historji matematyki ostatnich dziesięcioleci jest coraz wydatniejsze przenikanie „mnogościowych" pojęć i metod do teoryj matematycznych. Dziś wykład zasad analizy matematycznej nie może się już obejść bez pewnego minimum teorji mnogości. To samo da się zresztą powiedzieć o nowożytnym wykładzie geometrji. Pod wpływem nowego punktu widzenia drgnęły nawet teorje klasyczne i ustalone: okazało się, że wiele rezultatów wymaga sprecyzowania i pogłębienia, pojawiło się mnóstwo interesujących zagadnień, częstokroć trudnych i do dziś nie rozwiązanych.

Wpływ tych przeobrażeń w matematyce zaznaczył się już w nauczaniu szkolnem. Mówi się np. w szkole o zbiorach przedmiotów, o przyporządkowaniu sobie elementów dwóch zbiorów, o punktach skupienia i t. p. Należy przypuszczać, że z biegiem czasu coraz więcej pojęć i wyników teorji mnogości uzyska prawo obywatelstwa w szkole. Wspomniana ewolucja stanowi jeden z bardzo ciekawych i żywotnych tematów dydaktycznych.

Pierwszym podręcznikiem polskim teorji mnogości był „Zarys teorji mnogości" prof. W. Sierpińskiego, wydany w r. 1912. Nowe wydanie tej książki, znacznie rozszerzone i zmienione, ukazało się w dwóch częściach, z których pierwsza osiągnęła jeszcze jedno wydanie i obejmuje *teorję mnogości abstrakcyjnych*, druga zaś *topologję ogólną*. W porównaniu z wydaniem pierwszem jest to niemal zupełnie nowa książka, opracowana z uwzględnieniem wyników najnowszej daty i własnych badań Autora.

Wydany obecnie „Wstęp" posiada charakter znacznie bardziej elementarny. Dążeniem Autora, jak czytamy w przedmowie, było wyłożenie pewnego koniecznego dla każdego matematyka minimum wiadomości z dziedziny teorji mnogości w sposób możliwie przystępny i zrozumiały, tak, aby książka mogła być uzupełnieniem wykształcenia matematycznego dla jednych, a wstępem do dalszych studjów dla innych.

Wykład Prof. W. Sierpińskiego jest nacechowany prostotą i rzeczowością, wolną od pretensjonalności; posiada on cenny dar nadawania rozumowaniom zwięzłej i jasnej formy, nie pozostawiającej niedomówień ani wątpliwości.

Książka jest pięknie wydana — jak zwykle u K. S. Jakubowskiego.

S. Straszewicz (Warszawa).

= ANTONI ŁOMNICKI | Geometrja elementarna | Podręcznik dla klas wyższych szkół średnich | A. Łomnickiego: Geometrji części I. | wydanie szóste | Książnica-Atlas | Lwów — Warszawa | 1929 |

For. 23 × 15. Str. 383. — Cena zł 9,20.

= ANTONI ŁOMNICKI | Geometrja | Podręcznik dla szkół średnich | Część druga | Trygonometrja | Wydanie czwarte | Lwów — Warszawa | Nakład Księgarni Gubrynowicza i Syna | 1930 |

For. 23 × 15. Str. 184. — Cena zł 4,40.

= S. NEAPOLITAŃSKI | Zarys | dydaktyki matematyki | dla nauczycieli szkół powszechnych i średnich | Treść: | Wstęp | Cele nauczania matematyki | Metody " " | Sposoby " " | Zasady " " | Nauczanie matematyki w szkole | pracy (szkice) | Charakter wiedzy matematycznej | Warszawa | 1929 |

For. 23 × 15. Str. 159. Cena zł 6,—.

DZIAŁ ZADAŃ. [12]

(Rozwiązania zadań zaczniemy podawać w miarę ich nadsyłania, zaczynając od zeszytu 3.)

TEMAT DO OPRACOWANIA.

Nr. 1. Dany jest prostokątny arkusz papieru o rozmiarach $a \times b$; z tego arkusza trzeba wyciąć możliwie największą liczbę kartek prostokątnych o danych rozmiarach $p \times q$. Podać ogólną metodę poszukiwania rozmieszczenia kartek na arkuszu (lub przynajmniej w tym przypadku, kiedy linje podziału mają być równoległe do krawędzi arkusza).

Uwaga: Redakcja nie posiada rozwiązania tego zagadnienia. *R*

ZADANIA ZWIĄZANE Z ARTYKUŁAMI W TEKŚCIE ZESZYTU.

Nr. 2. Podać wszystkie możliwe rozwinięcia powierzchni sześcianu. — *Do art.* [5]. *R*

Nr. 3. Wyznaczyć warunki, pod jakiemi

$$L = (A\gamma - C\alpha)^2 + (A\beta - B\alpha\ (C\beta - B\gamma)$$

staje się zerem przy wymiernych $\alpha, \beta, \gamma, A, B, C$.

Uwaga: Uważając A, B, C, za współczynniki, a α, β, γ za współrzędne jednorodne punktu, można $L = 0$ traktować jako równanie stożkowej; wobec tego można stosować metody geometrji analitycznej! Zbadać szczególny przypadek, kiedy $A = B = C = 1$. — *Do art.* [6].

K. Cw.

Nr. 4. Jeżeli $a = \alpha^2$, $b = \beta^2$, $c = \gamma^2$, gdzie α, β, γ są dowolnemi liczbami wymiernemi, spełniającemi warunek

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

to równanie $(m - b)^2 - 4\,(m - a)\,(m - c) = 0$ ma pierwiastki wymierne. Podać wyrażenie tych pierwiastków przez a, b, c. — *Do art.* [6]. *R*

Nr. 5. Autobus przebył trzecią część drogi z szybkością 60 km na godzinę, potem trzecią część z szybkością 45 km na godzinę i wreszcie trzecią część z szybkością 36 km na godzinę. Jaka była przeciętna szybkość autobusu? — *Do art.* [7]. *R*

Nr. 6. Podać różne sposoby konstrukcji odcinka średniego harmonicznego dla danych odcinków a i b. — *Do art.* [7]. *R*

ZADANIA Z WYŻSZYCH KURSÓW NAUCZYCIELSKICH.

Redakcja uzyskała od Dyrekcji W. K. N. w Warszawie zbiór zadań mat., które były dane na egzaminach pis. dla eksternistów z grupy fiz.-mat., zaczynając od roku szk. 1924/25. Podajemy te zadania, składając przy sposobności PP. Dyrektorowi i Wykładającym podziękowanie.

Nr. 7. (X. 1924). Dany jest układ równań:

$$x^2 + (y-5)^2 = 25,$$
$$y = x + m.$$

Przy jakich wartościach parametra m układ ma: 1) tylko jedną parę pierwiastków? 2) dwie pary pierwiastków? 3) nie posiada pierwiastków? Przedstawienie graficzne!

Nr. 8. (II. 1925). Dane są dwie przecinające się proste. Wykreślić koło o danym promieniu r, styczne do obu prostych. Wyznaczyć odległości punktów styczności od wierzchołka kąta w zależności od promienia r i kąta α pomiędzy danemi prostemi. (Przypadek szczególny: $\alpha = 45^0$).

Rozwiązać to samo zadanie metodą geometrji analitycznej, biorąc za oś odciętych jedną z danych prostych, a punkt ich przecięcia — za początek układu współrzędnych prostokątnych. (Przyjąć $\alpha = 45^0$).

Nr. 9. (X. 1925). (A). Rozwiązać układ równań:

$$9x^2 + 4y^2 = 36,$$
$$y = 2x - k.$$

Rozważyć ten układ w zależności od parametra k i określić, dla jakich wartości k układ nie posiada pierwiastków, dla jakich ma jedną parę pierwiastków, dla jakich ma dwie pary pierwiastków.

(B). Zbudować trójkąt ABC, mając dane: bok a, kąt A i wysokość h_3 (poprowadzoną do boku c). Rozważyć możliwość rozwiązania i liczbę rozwiązań.

To samo zadanie rozwiązać trygonometrycznie, t. zn. wyprowadzić wzory trygonometryczne na pozostałe elementy trójkąta.

Nr. 10. (II. 1926). Dany trójkąt ABC przekształcić na trójkąt prostokątny równoważny, tak, aby podstawa danego trójkąta była wiążnicą (przeciwprostokątną) trójkąta prostokątnego równoważnego. Uwzględnić w rozwiązaniu geometrycznem analizę, opis konstrukcji, dowód i szczegółową dyskusję. W dyskusji wyprowadzić trygonometryczne wzory zależności między bokami i kątami danego trójkąta w związku z możliwością zadania.

Redakcja proponuje podzielić wszystkie trójkąty na cztery klasy w zależności od tego, czy w trójkącie każdy z trzech boków można przyjąć za wiążnicę trójkąta prostokątnego równoważnego danemu, czy też takich boków jest dwa, czy jeden, czy wcale niema.

Nr. 11. (X. 1926). Zbudować trójkąt prostokątny, mając dane: podporę (przyprostokątną) b oraz rzut a' drugiej podpory na wiążnicę (przeciwprostokątną). Rozwiązanie algebraiczne, geometryczne (konstrukcyjne), dyskusja!

Dalszy ciąg zadań z W. K. N. — w następnym zeszycie.

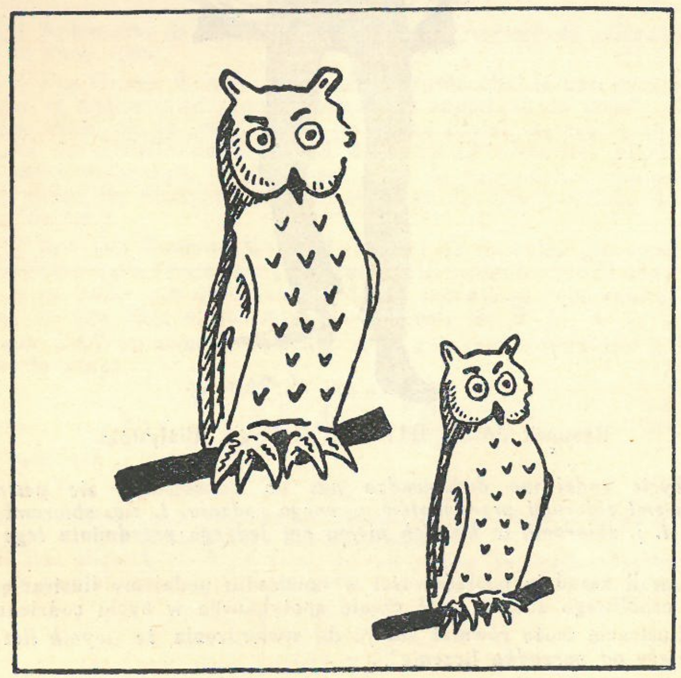
ZADANIA ROZRYWKOWE.

Nr. 12. *Zadanie o żarówce.* Żarówka 12½-wattowa w ciągu 12½ godzin zużyła energji elektr. za 12½ groszy. Żarówka 40-wattowa paliła się 40 godzin; ile trzeba za to zapłacić? *R*

Nr. 13. *Zamazane cyfry.* Znaleziono stary manuskrypt, w którym było zanotowane jakieś mnożenie, ale zachowały się tylko niektóre cyfry, a pozostałe były tak zamazane, że trzeba dowcipu, by je odtworzyć. Proponujemy nadesłać do Redakcji odcyfrowanie! — *(Porównać: LILAVATI, art. „Spłowiałe rękopisy", str. 51—52.)* *R*

```
(A)     . . . 9        (B)           1 . 2 . 5 .
          . 5 .                      . . . . . .
      -----------                -----------------
        . 8 . .                      1 . 2 . 5 .
    . . 2 . .                      . 1 . 2 . 5
    . 5 . .                      5 . 1 . 2 .
    -----------                . 5 . 1 . 2
    9 . . . . .              2 . 5 . 1 .
                           . 2 . 5 . 1
                           -----------------------
                           . . . . . . . . . . .
```

Nr. 14. *Łamigłówka z haftem.* Pani kupiła oryginalny dywan z dwoma wyhaftowanemi puhaczami; postanowiła go jednak rozciąć na jak najmniejszą ilość części, aby zeszyć z nich dwa równych wielkości dywaniki kwadratowe. Udało się to jej w zupełności: pocięła dywan, *nie naruszając haftu,* pozszywała części i miała zamiast jednego dwa dywaniki. Jak zrobiła? *Nadesłał Kazimierz Gilewicz (Poznań).*



ZADANIA STOSOWANE.

Nr. 15. *Zadanie fizykalne.* Ołowiana kula spadła na ziemię z wysokości 100 m. Obliczyć, jaki % nabytej energji kinetycznej został w ołowiu, jeżeli wiadomo, że temperatura jego podniosła się o 5°.

(Temat pożycz.)

Nr. 16. *Zadanie chemiczne.* Analiza ilościowa pewnego ciała wykazała: węgla 42,09%, wodoru 6,48%, tlenu 51,43%. Napisać odpowiedni wzór chemiczny! *R*

KĄCIK BEZ TYTUŁU.

Rysunek Józefa Blicharskiego (Białystok).

Życie codzienne doprowadza nas do zajmowania się pewnemi osobliwemi zbiorami przedmiotów pewnego rodzaju, t. zw. zbiorami pustemi, t. j. zbiorami, w których niema ani jednego przedmiotu tego rodzaju.

Gwoli zasadzie poglądowości w nauczaniu podajemy ilustrację takiego osobliwego zbioru, dość często spotykanego w życiu codziennem.

Ilustracja może również służyć do stwierdzenia, że *„wynik liczenia nie zależy od porządku liczenia".*

REPERTORIO
(scripto in lingua Peano).

Periodico polonico „PARAMETR" es dedicato ad didactica de mathematica in scholas elementare et secundario de omni typo. Periodico appare in 10 fasciculo per anno — ad 40 pagine in fasciculo — in editione de „Albertinum" in Posnania sub redactione de Antonio Mariano Rusiecki cum collaboratione de Dre Stephano Straszewicz, Professore de Schola Polytechnico in Varsavia.

Fasciculo 1 de Tomo 1 contine:

[1] PRAEFATIONE de Editore et de Redactione.

DISSERTATIONES.

[2] Dno Adamo Zarzecki fac deliberatione de „fabula et de quaestione in problemas cum textu verbale". Auctore fac distinctione inter abstracto computationes per numeros, ubi ipso operationes arithmetico praesenta quaestione pro discipulos, et concreto problemas cum fabula verbale, ubi quaestione es to discerne relationes inter magnitudines dato. Problemas concreto praesenta duo specie: aut es dato ullo quaestione, et problema consiste in inventione de datos necessario pro solutione de ce problema, aut es praesentato ullo datos numerico et problema consiste in deductione de consequentias.

[3] Dna Dre Lodovica Jeleńska discute „grave negligentia" in solutione de problemas mathematico in scholas: problemas non debe es soluto „in uno curru"; es necesse to repete problema iam soluto in modo que omni discipulo pote to percipe toto problema „in modo globale".

[4] Aphorismo de Stanislao Grzepski, Auctore de „Geometria" (edito in anno 1566).

[5] Dna Helena Stattler praesenta protocollo de uno hora scholare que es dedicato ad „complanatione de superficie de cubo". Auctrice non elige via de „rete" plano (in forma triviali de cruce) ad constructione de modello de cubo, sed distribue ad discipulos plure modellos antea praeparato et per dissecatione de ce modellos obtine cum collaboratione de discipulos diverso schemas de complanatione de superficie de cubo.

[6] Dno Dre Casimiro Cwojdziński da formulas pro constructione de aequationes de secundo gradu cum coëfficientes lineare de uno parametro m in modo que discriminante de ce aequatione habe radices rationale. Si nos elige aliquo numeros rationale $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma$, in modo que $\sqrt{AC}$ es numero rationale, et si nos calcula numeros a, b, c secundo formulas

$$a = C \cdot (B\alpha - A\beta)^2$$
$$b = B \cdot (A\gamma - C\alpha)^2$$
$$c = A \cdot (C\beta - B\gamma)^2,$$

tunc aequatione

$$(Am - a)\, x^2 + (Bm - b)\, x + (Cm - c) = 0$$

habe discriminante cum radices rationale. Si $B^2 - 4AC = 0$, tunc discriminante es functione lineare de parametro m.

Si nos elige $A = B = C = 1$, nos obtine formulas symmetrico, que post permutatione de litteras pote es scripto in modo sequente:

$$a = (\beta - \gamma)^2$$
$$b = (\gamma - \alpha)^2$$
$$c = (\alpha - \beta)^2$$

PARTE PRO JUVENES.

[7] Redactore Antonio M. Rusiecki initia parte de periodico pro circulos amatorio de mathematica inter scholarios. Pro initione es dato „Methodo algebraico de solutione de problemas". Auctore disquire 5 stationes de solutione: 1) saturatione de problema per systema de parametros sufficiente (tamen non necessario) pro solutione de problema, 2) constructione de systema de aequationes in fundo de „protocollo" de fabula cum parametros electo, 3) eliminatione de parametros non-necessario et solutione de aequationes, 4) interpretatione „arithmetico" de processu de solutione, 5) discussione de conditiones pro possibilitate de problema in relatione ad parametros dato.

[8] Aphorismo de Johanne Sniadecki, Professore de Academia in Cracovia et de Universitate in Wilno (1756—1830).

[9] INFORMATIONES. Circulario de Ministro de Confessiones Religioso et Educatione Publico: mutatione de programma pro scholas elementare et secundario (provisorio pro anno scholare 1929/30) cum instructione explicativo.

Editione de Commissione Paedagogico in Ministerio de C. R. et E. P.: „Physica et Chemia in Schola".

[10] CRONICA. Congressu de Mathematicos de Nationes Slavo, peracto in septembre 1929 in Varsavia. Sessiones de Sectiones pro Mathematica in Societate de Instructores (T. N. S. W.) in Varsavia et in Posnania (praelectiones de Dre Br. Knaster, Dre St. Straszewicz, Dre Cas. Cwojdziński).

[11] BIBLIOGRAPHIA (articulos de Dre S. Straszewicz et S. Kulczycki).

[12] PROBLEMAS.

VARIA. Carricatura de Artista Josepho Blicharski: illustratione pro „multitudine nullo".

Redactione de periodico „PARAMETR" pete P. T. Editores extraneo to mitte libros et periodicos dedicato ad didactica de mathematica pro recensione. Aequo modo Redactione pete P. T. Lectores extraneo to mitte informationes et cronica de didactica de mathematica in scholas de omni typo.

Adressa:

A. M. RUSIECKI
Redactore de „PARAMETR"
VARSAVIA
Ul. Koszykowa 31—5.
POLONIA

Praenumerata de „PARAMETR" pro extraneo vale pro anno (10 fasciculo) — aequivalente de 20 zloty. Pro semestre (5 fasciculo) prae numerata vale 50% de taxa annuale.

Paritate monetario: 172 zloty = 100 franco aureo.

Adressa:

„ALBERTINUM"
Administratione de „PARAMETR"
POSNANIA
Al. Marcinkowskiego 22.
POLONIA

Czcionkami Drukarni św. Wojciecha w Poznaniu.