Redaktor odpowiedzialny: Antoni Marjan Rusiecki w Warszawie.
Wydawca: Drukarnia i Księgarnia św. Wojciecha w Poznaniu.
Tłoczono w Drukarni św. Wojciecha w Poznaniu, na papierze z własnej fabryki papieru „Malta."

TOM 2 ZESZYT 4—5

PARAMETR

CZASOPISMO POŚWIĘCONE NAUCZANIU MATEMATYKI

Z DODATKIEM „MŁODY MATEMATYK"

WYCHODZI
POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO
PRZY WSPÓŁUDZIALE S. STRASZEWICZA

WARSZAWA — POZNAŃ

1931

P A R A M E T R

TOM 2 KWIECIEŃ-MAJ 1931 ZESZYT 4—5

T R E Ś Ć:

MŁODY MATEMATYK

ROK 1 (Dodatek do Parametra) NR. 4—5

? V

Cena podwójnego zeszytu „Parametra" z dodatkami — 3 złote.
Podpisano do druku 6. VII. 1931.

TOM 2 ZESZYT 4—5

PARAMETR

CZASOPISMO POŚWIĘCONE NAUCZANIU MATEMATYKI
Z DODATKIEM „MŁODY MATEMATYK"
WYCHODZI POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO
PRZY WSPÓŁUDZIALE DRA STEFANA STRASZEWICZA

KWIECIEŃ - MAJ 1931

ROZPRAWY.

DR. LUDWIKA JELEŃSKA (Grodno).

Rozwiązywanie zadań.

Nie będę powtarzała rzeczy powszechnie znanych o syntetycznym i analitycznym sposobie rozwiązywania zadań. Chciałabym tylko uwydatnić stronę psychologiczną przyjętych sposobów.

Jeżeli nauczyciel po wygłoszeniu, czy zanotowaniu zadania zapyta: „Czego się najpierw mamy dowiedzieć? Jakie jest pierwsze pytanie?", — to dziecko, gdyby nie siliło się na odgadywanie, jakiej odpowiedzi *chce od niego nauczyciel*, a miało odwagę szczerze zapytać o to, czego *ono* chciałoby się w związku z zadaniem najpierw dowiedzieć, — niejednokrotnie pytaniem wprowadziłoby w zdumienie nauczyciela.

Autentyczny fakt. — Nauczycielka mówi zadanie małej z I oddziału: „Lekarz w szpitalu badał chorych. W jednej sali leżało 7 chorych, których zbadał, w drugiej zbadał 5. Ilu chorych zbadał?" Dziecko chwilę milczy; nauczycielka czeka na odpowiedź, zamiast której otrzymuje głośno wypowiedzianą uwagę: „Ciekawam, na co też oni chorowali?"

Oto, czego się dziecko *najpierw* chciało dowiedzieć!

Gdy w zadaniu słyszy o zamówionych u stolarza półkach w różnych cenach i t. p., to pierwszem pytaniem, któreby zadało, gdyby nie rutyna szkolna, byłoby pytanie celu: „po co tyle półek, do czego miały służyć?" Pytanie takie byłoby zupełnie logiczne.

Jeżeli nauczyciel wie, jakie jest „pierwsze" pytanie, to dlatego, że wie, jakie jest drugie i trzecie, czyli, że ma gotowy plan rozwiązywania, a plan skonstruować można wtedy tylko, gdy się ogarnia *całość*. Nic więc dziwnego, że tego planu dziecko nie ma i w odpowiedzi na pytanie nauczyciela, odcina pierwsze z brzega działanie: „to trzeba najpierw podzielić" i t. p.

Syntetyczny sposób rozwiązywania naprawdę nie liczy się z psychologją.

Niejednokrotnie jednak stwierdziłam, że nauczyciel, który stara się trzymać sposobu analitycznego, właśnie utrzymać się nie umie. Bardzo wielu sądzi, że jeśli zacznie od „ostatniego pytania", — jeśli zapyta: „Na co mamy w zadaniu odpowiedzieć", — to już tem samem ułatwi znakomicie rozwiązanie. Tak nie jest. Analityczny sposób rozwiązywania jest trudny dla nauczyciela i *musi być dla nauczyciela trudny, jeśli ma być ułatwieniem dla ucznia.* Jest to zresztą powszechny fakt metodyczny.

Trudność analitycznego sposobu rozwiązywania polega na tem, że nauczyciel musi swojem pierwszem pytaniem *nastawić* dziecko na *problem*, tkwiący w zadaniu. Gdy mu się to uda, wówczas dziecko samo będzie się starało rozplątać i z konieczności pójdzie drogą od jądra, poprzez wszystkie dane aż do pierwszego.

Przykład: Sklepikarz płacił za 10 kopert — 9 gr, a sprzedawał tuzin kopert za 14 gr. Ile zyskał na sprzedaży 60 kopert? — Problem tkwi w cenie kupna i sprzedaży 60 kopert. Pytanie nauczyciela powinno to uwydatnić; inaczej, choćby zaczął od „ostatniego pytania", dziecko będzie się błąkać. Nastawimy zaś odpowiednio uwagę dziecka na jądro problemu, jeśli spytamy: „kiedy wogóle kupiec zyskuje lub traci na sprzedaży?... A w zadaniu zyskał..., zatem sprzedał drożej niż kupił... O ile drożej?"...

W ten sposób dzieci same szukać będą, ile zapłacił za 60 kopert, i natkną się na konieczność wyliczenia poszczególnych danych. Będą rozumiały, o co im chodzi, zanim zadanie rozbiją na poszczególne działania, a to właśnie rzecz najważniejsza.

Jednak stosowanie sposobu analitycznego nie jest konieczne w rozwiązywaniu zadań.

Jeżeli przy wprowadzaniu nowego typu zadań trzymamy się zasady „zawiązywania"[1]), — to w rozwiązywaniu głównym momentem będzie „zapis" zadania, czyli zestawienie wzoru.

Uważam ten system rozwiązywania za najracjonalniejszy, bo dziecko ogarnia myślowo całość zadania, — rozumie, — nie rozumując słowami. I faktycznie ujęcie we wzór, o ile oczywiście stopniujemy rozumnie trudności, jest dla dzieci łatwiejsze, niż rozbijanie na pytania. Zagadnienie, które skupia całą uwagę, jest zagadnieniem, „jak zapisać zadanie". Skoro wzór jest ułożony, następuje wyrachowanie, które daje odpowiedź.

Ażeby dzieci ułożyły wzór, trzeba, aby rozumiały samą *rzecz* i umiały ją *wysłowić*. Rzecz — słowo — symbol!

W I oddziale wprowadzamy mnożenie:

1° Wywołujemy Jasia i każemy wrzucić do słoja trzy razy po dwa kasztany (czynność konkretna — *rzecz*).

2° Zapytujemy dzieci, co zrobił Jaś? — „Wrzucił trzy razy po dwa kasztany". Czynność wykonaną (rzecz) ujmują *słowami*.

3° „Zapisz to, co mówisz". — 3×2 (*symbol*).

Dla dziecka pierwszą płaszczyzną myślową jest sfera konkretnego manipulowania, wykonania *rzeczy*. Tego, co dobrze robi i bystro spostrzega, nie umie często wypowiedzieć, czyli transponować na *słowa*. Sfera myślenia słownego jest wyższą płaszczyzną myślową. Wreszcie słowa musi transponować na *symbole* matematyczne.

Rzecz — słowo — symbol! To zestawienie w rozwiązywaniu *problemów* jest rzeczą najważniejszą, samo zaś wyrachowanie zadania jest rzeczą drugorzędną.

Przy systemie rozwiązywania „zapisowego", czyli ujmowania we wzór, poprzez zrozumienie treści i wysłowienie, — wyrachowanie jest na drugim planie i skupia uwagę na sobie

1) Patrz: „*Zawiązywanie zadań*" — *Parametr* Nr. 1. r. b.

wówczas, gdy już myśl uporała się z samym problemem. Myśląc o sposobie rozwiązywania, dziecko nie potrzebuje myśleć jednocześnie o wyrachowaniu, i ta swoboda myśli pozwala na wniknięcie lepsze w sam typ zadania.

DR. ROMANA MILLERÓWNA (Białystok).

Zadania - problemy.

W *Parametrze* Nr. 1 (1931) p. Dr. L. Jeleńska zwraca uwagę na *„zawiązywanie"* zadań, które musi poprzedzać i przygotowywać rozwiązywanie. Posługując się tym nowym terminem, możnaby mu nadać jeszcze szersze znaczenie, rozumiejąc przez „zawiązywanie" zadań — tworzenie problemów, domagających się rachunkowego rozwiązania.

Na typ zadań-problemów zwraca uwagę J. Kühnel w swej książce p. t. *„Neubau des Rechenunterrichts"* (Leipzig 1922). Kühnel stwierdza, że jeżeli w życiu jesteśmy zmuszeni do zastosowania wiadomości matematycznych, to problem, jaki nam stawia życie, wygląda zupełnie inaczej, aniżeli zadania, które odnajdujemy w szkolnych książkach rachunkowych. Ktoś, kto doskonale rozwiązywał zadania w szkole, może jednak przed życiowym problemem matematycznym stanąć bezradny.

Oto ta różnica na przykładzie. Zadanie z podręcznika brzmi: *Zosia miała 2 zł. Za 85 gr kupiła 1 kg śliwek. Ile pieniędzy jej pozostało?* Życiowo biorąc, Zosia, chcąc kupić śliwek, musi zastanowić się nad tem, ile kg śliwek jej potrzeba, jaka jest ich cena, ile pieniędzy może wydać, i — co najważniejsze — musi się orjentować, że te wszystkie dane są jej potrzebne, i musi je umieć zdobyć. Otóż i dzieci, chcąc uzyskać matematyczne przygotowanie do życia, muszą same sformułować zagadnienie, same szukać i pytać o dane i same znaleźć rozwiązanie, — bo życie nie podaje nam gotowych danych, nie formułuje dokładnie problemu.

Jako przykład przytaczam jedno z zadań, które podaje Kühnel ze swojej praktyki szkolnej. (Zadanie podane jest w trochę zmienionej formie.) Owo zadanie w podręczniku brzmi: *Do wytapetowania jednego pokoju i przedpokoju zużyto 20 rolek tapet w cenie po 4 zł rolka i 16 rolek po 3 zł, 10 metrów szlaku po 1 zł 50 gr i 8 m po 1 zł. Za naklejenie tapicer wziął po 50 gr od rolki.*

To samo zadanie, przekształcone jako zadanie-problem, przedstawia się następująco: — *Jakie brudne są ściany naszego pokoju!* — *powiedziała raz matka Ali.* — *Jakże chętniebym je kazała wytapetować, ale nie wiem, czy mi pieniędzy starczy. Kto z was, dzieci, znajdzie radę, jak obliczyć, ile potrzeba pieniędzy?*

I już ze strony dzieci, wdrożonych do tego rodzaju pracy, sypią się pytania i projekty. Któreś z dzieci podaje, że na wystawie w sklepie widziało tapety w cenie od 2 zł za rolkę. Jak duża może być taka rolka? Nauczyciel podaje wymiary. Kto widział, jak się tapetuje? Przycina się tapety tak długie, jak wysoka jest ściana, i nakleja obok siebie. Tu dzieci wysuwają, że muszą wiedzieć, ile tapety potrzeba, a więc, jak duży jest pokój? Obliczamy, ile rolek potrzeba; zastanawiamy się nad doborem tapet i szlaków i kosztem roboty. Dzieci znowuż pytają, ile się płaci tapicerowi i jak się jego pracę oblicza.

Podobnie idzie praca nad obliczeniem kosztów wytapetowania przedpokoju, i teraz odpowiedź na pytanie, czy mamusi wystarczyło pieniędzy, jest łatwa i prosta. Trzeba tylko wiedzieć, ile mamusia mogła wydać.

Oczywiście zadanie-problem będzie miało jeszcze więcej wartości, gdy będzie związane z życiem szkolnem, z czemś, co dzieci mogą same później wykonać, a więc np. obliczanie kosztów wycieczki, zakupu materjału na roboty ręczne i t. p.

Gdy wprowadziłyśmy zadania-problemy do naszej ćwiczeniówki przy Seminarjach Nauczycielskich w Białymstoku, dzieci bardzo zajęły się niemi i powoli same zaczynają wyszukiwać problemy i znosić dane. Nasze życie szkolne daje nam często okazję do formułowania problemów.

Oto na wieczorze choinkowym zdarzyło się, że św. Mikołajowi zabrakło torebek ze słodyczami, niektóre dzieci nic tego dnia nie dostały. Wychowawczyni IV oddziału rzuciła pytanie swoim dzieciom, „jakże to się stało?"

Klasa przypuszczała, że może ilość dzieci szkolnych była źle obliczona. Sprawdzają, pytają o ilość przygotowanych torebek. Okazuje się, że była ona znacznie większa, aniżeli ilość dzieci. Któreś zauważa, że mieliśmy bardzo dużo małych gości, bo wielu z rodziców przyprowadziło siostrzyczki i braciszków naszych dzieci. Dochodzimy do wniosku, że wiele torebek dostało się gościom. Byłoby bardzo miło, gdyby podarki starczyły także i dla gości; — czy to możliwe? Dzieci obliczają przeciętną ilość gości, obliczają koszty, pytają o fundusz przeznaczony przez Komitet Rodzicielski, — i odpowiedź wypada negatywnie, bo gości zazwyczaj przychodzi do nas bardzo dużo.

Innym razem dzieci znoszą pieniądze na prenumeratę *Płomyka* za pół roku. Tak trudno odrazu przynieść taką dużą sumę pieniędzy. Czy nie lepiej byłoby płacić miesięcznie po 40 gr? I znowuż IV oddział liczy, zagląda do warunków prenumeraty, pyta o dane, ażeby wykazać, ile zaoszczędzamy, płacąc za większy okres czasu.

O znaczeniu zadań-problemów wspomina także K. Marsch w artykule: *„Das Problem im Rechenunterricht“* (Nr. 3 miesięcznika *„Die Quelle“* — Wiedeń 1931), podkreślając, że aby nauczyć dzieci myśleć, trzeba je nauczyć pytać, a tego dziecko nie nauczy się z podręczników do rachunków. Podaje on kilka przykładów z własnej praktyki, które wyraźnie nam pokazują znaczenie tego typu zadań.

Jeden zarzut można postawić: zadania te zabierają dużo czasu; więcej ponad jedno zadanie tego rodzaju nie można na jednej godzinie rozwiązać. Odpowiedź jest prosta: dzieci korzystają proporcjonalnie do zużytego czasu. Jeżeli podkreślam wartość zadań-problemów, to z tego nie wynika, ażeby trzeba było wszystkie inne odrzucić. I zadania podręcznikowe są potrzebne, zwłaszcza jeżeli chodzi o wykształcenie pewnej sprawności matematycznej, ale nie możemy zapominać, że dziecko potrzebuje również i matematycznego przygotowania do życia, a to jest do tej pory w wielkiem zaniedbaniu. Chcąc to naprawić, trzeba uczyć dzieci stawiania zagadnień, wynajdywania danych i pytania o nie, trzeba wśród innych zadań rozwiązywać z niemi zadania-problemy.

STANISŁAW WITESZCZAK (Tyszowce).

Rozwiązanie zagadnień metodą obrad grupowych.

Metody nauczania rachunków w szkole powszechnej niezawsze osiągają zamierzony cel. Przyczyną tego w znacznej części jest różnorodność indywidualności, różny poziom umysłowy, stąd różnice w stopniu zainteresowania. Jak dostosować zagadnienia matematyczne do różnorodnych indywidualności, jak wzbudzić ogólne zainteresowanie, chęć do współpracy, doprowadzić uczniów do samodzielnego ujmowania i rozumowania, a przez to rozwinąć ich inteligencję, ujmuje to przedstawiona poniżej metoda obrad.

Uczniów dzielimy na grupy, pod względem poziomu umysłowego równe. Zagadnienie dajemy aktualne, wysunięte z potrzeb codziennych.

Nad ułożeniem planu rozwiązania dzieci naradzają się półgłosem w grupach. Każda grupa podaje plan w postaci wniosku, — o ile możności — ujętego we wzór. Po zapisaniu wniosków wnioskodawcy kolejno uzasadniają swoje projekty, poczem dyskusja, w której biorą udział wszystkie grupy, stara się wykazać prawdziwość wniosków, ich celowość oraz stronę ekonomiczną. Dozwolone są interpelacje, na które wnioskodawca daje wyczerpujące odpowiedzi. Ostatni głos ma wnioskodawca, który swój wniosek podtrzymuje, wycofuje lub uzupełnia. Po dyskusji nad wszystkiemi wnioskami i wykazaniu ewentualnych błędów w rozumowaniu pozostają tylko wnioski dobre, które się porównywa dla wykrycia oryginalniejszej myśli, czy też dla uwydatnienia strony ekonomicznej. Samo rozwiązanie, jako strona czysto techniczna, ma już drugorzędne znaczenie.

Po rozwiązaniu następuje powtórka rozumowań, związanych z układaniem planów przez uczniów, należących do grup słabszych.

Jak więc widzimy, pracuje samodzielnie cała klasa, współdziałanie zaś w grupach o równym poziomie umysłowym dopuszcza wysiłek umysłowy nawet u najsłabszych, a wnioski, chociażby i niewłaściwe, dają pole do rozumowania. Uczniowie muszą zawsze pamiętać o celu zagadnienia. Unika się tego, że przy częstej pomocy ze strony nauczyciela uczeń traci z przed oczu cel pracy i w połowie przerobionego zagadnienia nie wie, o co mu chodzi.

Zarzuciłby ktoś, że metoda jest za trudna dla dzieci młodszych. Nie! Zaczynamy od zagadnień najprymitywniejszych. W każdej lekcji musimy sobie zdać jasno sprawę, jaki stopień trudności odróżnia dane zagadnienie od poprzedniego. Niezachowanie stopnia trudności paraliżuje dyskusję i uniemożliwia pracę nawet w najwyższych klasach.

Jest rzeczą jasną, że zamiast dwóch poważniejszych zagadnień na godzinę będziemy musieli jedno opracowywać przez parę godzin, ale przerobimy gruntownie i jeśli, jak powiada R o u s s e a u, umysłu nie zdołamy całkowicie wykształcić, to uczynimy go wykształcalnym, nauczymy ucznia krytycznie patrzeć i orjentować się w zjawiskach życia codziennego.

MARJA SZABLEWSKA (Kościerzyna).

Lekcja w szkole powszechnej na temat: „Zapoznanie z podziałem".

Zapoznając dzieci z dzieleniem, musimy koniecznie rozróżnić w dzieleniu dwie odmiany. W jednej mówimy, *na ile* części trzeba podzielić, a szukamy, po ile będzie w każdej części. W drugiej odmianie mówimy, *po ile* ma być w każdej części, a szukamy, ile tych części będzie. Różnica między dzieleniem *„na kilka"* a dzieleniem *„po kilka"* najsilniej zaznacza się w czynności na konkretach.

Kładę na stole 21 kasztanów (nie podając ilości) i mówię: mam tutaj kasztany, chcę je rozłożyć na 3 równe kupki, — jak to zrobić?

Dzieci próbują różnie, wreszcie rozkładają po 1 na 3 odrębne kupki. Po rozłożeniu dzieci liczą, po ile jest w każdej kupce. Następnie biorę 20 kasztanów (nie podając ilości) i mówię: Przyjdź, rozłóż te kasztany na 4 równe kupki! Po ile jest w każdej?

W dalszym ciągu biorę 18 kasztanów i mówię: Mam tutaj 18 kasztanów, chcę je rozłożyć na 3 równe kupki, — po ile będzie w każdej? — Co ja wam teraz powiedziałam? (Jest 18 kasztanów i rozłożyć trzeba na 3 kupki.) — A czego się dowiemy? (Po ile będzie w każdej kupce.) — Przyjdź rozłóż! — Po ile jest w każdej kupce? (Po 6.)

Kładę 15 kasztanów — i mówię: Mam 15 kasztanów, chcę je rozłożyć na 3 równe części, — po ile będzie w każdej? — Przyjdź, rozłóż! — Po ile jest w każdej kupce? (W każdej kupce jest po 5 kasztanów.)

— Jak to zapisać? Podaję zapis:

$$\frac{15}{3} = 5.$$

— Ja wam to teraz przeczytam, a wy uważajcie, jak będę wskazywała. Wskazuję i czytam: 15 kasztanów rozłożyć na 3 równe części, — jest po 5.

Po odczytaniu mojem, jedno dziecko wskazuje, inne odczytują.

Przerabiam jeszcze podział 25 kasztanów na 5 części; dzieci wyliczają, po ile jest.

Działanie już notują same dzieci i odczytują, dokładnie wskazując:

$$\frac{25}{5} = 5.$$

Nakoniec podaję zadanie z treścią: Zosia miała 10 cukierków, cukierki te podzieliła między dwie swoje koleżanki po równo. Po ile dostała każda?

Dzieci wyliczają. — Kto to zadanie zapisze? Zapis:

$$\frac{10}{2} = 5.$$

Odczytanie zadania. — Następnym etapem winno być odczytywanie oderwanych przykładów na podział i konkretyzacja tych przykładów przez podkładanie odpowiednio dobranych zadań z treścią. Zadania te układają dzieci same.

Obacz: Dr. L. J e l e ń s k a. *Metodyka pierwszych lat nauczania.* Wydanie III. Nakładem „Naszej Księgarni" w Warszawie.

INŻ. LEONIDAS CHRZCZONOWICZ (Warszawa).

Wymiarowość wielkości a nauczanie rachunków.

1. Wielkości, z któremi uczeń obecnie ma do czynienia na lekcjach matematyki w szkołach ogólnokształcących, są to niemal wyłącznie: długość, czas, pole, objętość, kąt i wartość pieniężna (moneta). Omówienie tych wielkości i ich jednostek miary, w odpowiednim, — jak dotychczas zresztą bardzo niewystarczającym — zakresie, oddawna już należy do uprawnionej treści arytmetyki.

Z innemi wielkościami uczeń spotyka się sporadycznie. Tymczasem obecnie, dzięki niezmiernemu tempu rozwoju techniki, — dzięki coraz to wzrastającemu znaczeniu życia gospodarczego, szereg innych, wciąż jeszcze dla szkoły ogólnokształcącej „nowych" — lecz jakże już starych wielkości — i „nowych" jednostek miary, więzionych do niedawna w fizyce, wkroczył do życia, wszedł zwycięsko w zakres pojęć nawet życia codziennego.

Wielkości i jednostki te, pojęcia te stanowią obecnie takąż uprawnioną praktycznie, takąż życiowo niezbędną część pojęć szerszego ogółu, jak dotychczas kilogram, metr, minuta, złoty. Wymienimy tu choćby tylko *prędkość* i jej jednostki miary (np. kilometr na godzinę oraz węzeł), pracę (kilogrammetr, kilowattgodzina, kalorja) i *moc* czyli *dzielność* (koń mechaniczny i watt).

2. Jednakowoż nawet wśród ludzi, zaliczanych do sfer kulturalnych, z reguły niemal panuje brak istotnego zrozumienia sensu i znaczenia tych wielkości i jednostek, pomimo że z temi pojęciami wciąż się stykają i niemi operują. Wytłómaczyć się to daje tem, że szkoła ogólnokształcąca pomimo olbrzymich postępów w dziedzinie pedagogiki nie nadąża za szybkim rozwojem życia, że nietylko nie uwzględnia należycie jego dzisiejszych wymogów, lecz częstokroć wprost ich nie wyczuwa.

Jeżeli brak należytego rozumienia sensu i znaczenia tych wielkości naogół uważać należy za zjawisko wysoce ujemne i szkodliwe nietylko pod względem kulturalnym, lecz i gospodarczym, to dla zawodowca staje się ten brak już rzeczą wprost niedopuszczalną.

Dlatego też dla szkoły zawodowej — właśnie jako zawodowej — dokładne opanowanie przez uczniów tych nowych pojęć i odpowiednich jednostek, należyte oswojenie i obycie się z niemi, posiadają podstawowe, zasadnicze znaczenie.

Te „nowe" pojęcia powinny być przeto włączone w szkole zawodowej do zakresu materjału naukowego rachunków narówni z długością, wagą, czasem. Do tych nowych wielkości i jednostek miar oprócz dotychczasowych: *długości, pola, objętości i pojemności, wagi* (jako *siły*, a nie masy), *kąta, czasu* i różnych *cen* jednostkowych wraz ze złotym, zaliczam jeszcze ponadto co najmniej: *prędkość, obrót* (a w związku z tem *prędkość kątowa*), *pracę* i *energję* wraz z jej jednostkami (kilogrammetr, kilowattgodzina, kalorja), *moc* i jej jednostki miary (watt, koń mechaniczny), *ciśnienie* (atmosfera techniczna) i *naprężenie, ciężar właściwy.* Przyśpieszenie i masę świadomie pomijam.

3. Konieczność uwzględnienia powyższych wielkości w nauce rachunków stoi poza tem w ścisłym związku z samem ujęciem tej nauki w szkole zawodowej, — ujęciem dostosowanem do ducha, charakteru i zadań szkoły zawodowej, jako zawodowej. Nauka rachunków w szkole zawodowej powinna czynić zadość czterem podstawowym postulatom.

I. Ustosunkowanie się ucznia do nauczanego przedmiotu powinno być czynne, funkcjonalne, — stąd oparcie nauczania na rozwiązywaniu odpowiednio dobranych zadań. Uczeń uzyskuje wiadomości nie dla nich samych, ale dla zastosowywania przy rozwiązywaniu zagadnień.

II. Tematy do zadań powinny być czerpane z dziedziny zawodu, uwzględnianego przez szkołę, lub z dziedzin bezpośrednio z tym zawodem związanych. Nauczanie rachunków powinno więc posiadać podłoże naturalne — nie sztuczne.

III. Powinny być wysuwane na plan pierwszy zagadnienia, a nie zasady. Zagadnień nie należy traktować jako ilustracji zasad, lecz wręcz odwrotnie. O zasadach mówi się o tyle, o ile potrzebne one będą przy rozważaniu poszczególnych zagadnień.

IV. Przy nauczaniu rachunków należy szeroko uwzględniać rozumowanie, nie zaś opierać nauczanie na biernem zapamiętywaniu wiadomości. Stąd nakaz szerokiego stosowania przez ucznia „informatora" zawodowego ze zbiorem tablic, wzorów i wykresów.

W związku z powyższemi postulatami, naukę rachunków w szkole zawodowej powinny cechować:

a) ścisła korelacja z innemi przedmiotami, przedewszystkiem zaś z nauką technologji i z nauką maszynoznawstwa (ewentualnie z nauką fizyki) — tak, iż do pewnego stopnia nauka rachunków nabiera w szkole zawodowej charakteru propedeutyki powyższych przedmiotów;

b) jak najdalej posunięta konkretyzacja i upraktycznienie.

Już bezpośrednio z postulatów powyższych wypływa więc jeszcze jedna racja do wcielenia do nauki rachunków tych „nowych" wielkości i ich jednostek miary, jako pojęć, stanowiących integralną treść zagadnień, na których właśnie oparta zostaje w szkole zawodowej nauka rachunków.

4. Celem należytego uwzględnienia tych pojęć i należytego opanowania ich przez ucznia, koniecznem jest poprawne ich wprowadzanie. Naprzykład błędne będzie powiedzenie: prędkość to droga przebyta przez ciało w ciągu jednej minuty. Prędkość to nie jest droga. Prędkość to wielkość swoista, wielkość innego rodzaju, niż droga i czas. Prędkość jest jak gdyby ilorazem drogi i czasu: aby wyznaczyć prędkość ruchu, dzielimy liczbę wymiarową drogi w pewnych jednostkach długości przez liczbę wymiarową czasu w pewnych jednostkach czasu i otrzymujemy w ilorazie liczbę wymiarową prędkości, wyrażoną w odpowiednio dobranych jednostkach prędkości.

Podobnie niepoprawnem będzie powiedzenie: cena to liczba złotych zapłaconych np. za jeden kilogram. Cena jednostkowa to nie są złote; uczeń powinien zrozumieć istotną różnicę między ceną np. za kilogram i za metr, — powinien zrozumieć, że są to różne, nieporównywalne wielkości, że różnica między temi dwiema cenami jest całkiem innej natury, niż np. różnica między metrem a stopą.

Po tych — nazwijmy je — subtelnościach zazwyczaj prześlizguje się w szkole, i z tych rzeczy ani ogół kulturalny, ani częstokroć nawet zawodowcy nie zdają sobie należytej sprawy.

Uczeń powinien dokładnie zrozumieć, że w skład pojęcia tych „nowych" wielkości wchodzi pojęcie pewnego wzajemnego ustosunkowania się wielkości podstawowych, jak długość, czas i waga (ciężar — jako siła, a nie masa), — no i jeszcze wartość ekonomiczna (złoty).

Dla dokładnego unaocznienia zależności, wchodzących w skład tych pojęć, albo wzrokowego oswojenia się z niemi i uniknięcia możliwego, a zrozumiałego zresztą pomieszania tych pojęć, koniecznem jest stosowanie przy nauce rachunków *symbolicznych oznaczeń* tych wielkości w postaci stosunków, np. m/sek, zł/kg lub zł/m, a także w postaci iloczynów, np. kgm, kWh (kilowattgodzina), narówni zresztą z powszechnie stosowanemi symbolami m^2 i m^3. Symboliczne oznaczenia wymiarowości tych pojęć należy stosować w postaci znormalizowanej, przyjętej już ogólnie w nauce i technice.

5. Zgodnie z wysuniętemi powyżej założeniami, wielkości te powinny stale wchodzić w treść zagadnień rozważanych, w treść zadań rozwiązywanych przez uczniów. Wszakże na zagadnieniach tych, na zadaniach oparta zostaje w szkole zawodowej cała nauka rachunków. Otóż celem tem lepszego oswojenia ucznia z temi wielkościami i możliwego zżycia się z niemi, uczeń powinien przy rozwiązywaniu każdego poszczególnego zadania przez cały bieg rachunków *dokonywać działań bezpośrednio nad temi wielkościami.* Takie skonkretyzowanie samego biegu rachunków przyczynia się do lepszego zrozumienia całego rozumowania, do zrozumienia dokonywanych operacyj, wreszcie do zrozumienia otrzymanych rezultatów, — posiada więc pierwszorzędne walory dydaktyczne. Zwykle uczeń dokonywa, jak dotychczas, dwu zbędnych, żmudnych i niecelowych psychologicznie i pedagogicznie myślowych operacyj. Uczeń przechodzi raz od konkretnych wielkości, tkwiących w zagadnieniu, do liczb oderwanych, a po otrzymaniu rezultatu uczeń zmuszony jest znowuż wracać do mian, do konkretnych wielkości, zmuszony jest doszukiwać się konkretnego sensu otrzymanego rezultatu. Praktyka codzienna w szkołach zawodowych poucza, że uczeń podczas operacyj nad liczbami oderwanemi gubi sens konkretny zagadnienia i po dojściu do rezultatu już bywa najzupełniej zdezorjentowany.

Wśród nauczycieli matematyki panuje głęboko zakorzeniona niechęć do bezpośrednich działań na wymiarowych wielkościach. Już czas najwyższy pogodzić się z tem, że najzupełniej uprawnione są te bezpośrednie działania, że najzupełniej uprawnione jest np. mnożenie prędkości przez czas i otrzymanie w wyniku długości, albo mnożenie ceny za kilogram towaru przez kilogramy i otrzymanie w wyniku złotych i t. d. i t. d. Rzecz zrozumiała, że działania te są uprawnione o tyle, o ile posiadają sens konkretny.

Konieczne jest jednak w tych wypadkach pewne zastrzeżenie. Przy działaniach bezpośrednich na wielkościach wymiarowych należy je uprzednio uzgodnić między sobą pod względem jednostek miary tych wielkości.

6. Przytoczone poniżej zadania i ich rozwiązania konkretyzują na przykładach wysunięte w niniejszym artykuliku dezyderaty. Zastrzegam się, że rozwiązania tych zadań podane zostały w ujęciu zwięzłem, skróconem. Na lekcji powinny one być obszerniej, bardziej dydaktycznie omówione i potraktowane. Zadania poniższe uwzględniają głównie potrzeby szkół dla metalowców.

1) Samochód, jadąc ze stałą prędkością, przebył 128 km w 3 godz. Ile wynosiła prędkość samochodu w metrach na sekundę?

Pierwsze ujęcie:

$$v = 128 \text{ km} : 3 \text{ godz} = 128\,000 \text{ m} : 10\,800 \text{ sek} =$$
$$= \frac{128\,000}{10\,800} \text{ m/sek} = 11{,}85 \text{ m/sek}.$$

Drugie ujęcie:

$$1 \text{ km/godz} = \frac{1000}{3600} \text{ m/sek} = \frac{5}{18} \text{ m/sek.}$$

$$v = \frac{128}{3} \text{ km/godz} = \frac{128}{3} . 1 \text{ km/godz} = \frac{128}{3} \cdot \frac{5}{18} \text{ m/sek} =$$

$$= 11{,}85 \text{ m/sek.}$$

2) Ile będzie ważył odlew stalowy o objętości 145 dm^3 (bez pustot)? — Wskazówka: ciężar gatunkowy stali wynosi 7,86 t/m^3, gdzie t oznacza tonnę metryczną: 1 t = 1000 kg.

$$1 \text{ t/m}^3 = \frac{1000}{1000} \text{ kg/dm}^3 = 1 \text{ kg/dm}^3.$$

$$7{,}86 \text{ t/m}^3 = 7{,}86 \text{ kg/dm}^3.$$

$$x = 145 \text{ dm}^3 . 7{,}86 \text{ kg/dm}^3 = 1140 \text{ kg}.$$

Uwaga. Jak w tem, tak i w poprzedniem zadaniu, — i wogóle możliwie przy wszelkich zadaniach, — wskazane jest uprzednie przeprowadzenie przez ucznia pamięciowego rachunku szacunkowego dla orjentacji: więc w danym wypadku oszacowanie pamięciowe iloczynu 145 . 7,86 daje zgrubsza 150 . 8 = 1200.

7. Jak widać z powyższych przykładów, nie idzie wcale na danym poziomie nauczania o wykład zasad mnożenia i dzielenia symbolów jednych przez drugie, czy o uzasadnienie tych działań, lecz poprostu o konsekwentne pisanie mian w ich symbolicznej postaci przy liczbach, na których wykonywamy te lub inne działania, i pogodzenie się z myślą, że mnożymy i dzielimy w ten sposób jedne wyrażenia mianowane przez drugie również mianowane. Oznaczenie rodzaju wielkości wymiarowej czyli — właściwie mówiąc — oznaczenie wymiaru, jaki będzie miało miano przy liczbie, otrzymanej w wyniku naszych działań, wymaga rozważań, dokonywanych — i to stanowi istotę rzeczy, — jak przy przystąpieniu do samego rozwiązania zagadnienia, tak i podczas całego przebiegu działań.

8. W artykule powyższym poruszałem dwie sprawy: jedna — to sprawa wprowadzenia do nauki rachunków w szkołach zawodowych pojęcia wielkości wymiarowych i ich jednostek miary, i druga — to sprawa zapoznawania przez szkołę ogólnokształcącą tych wielkości i jednostek.

W jakim zakresie i w jakiej postaci należałoby w szkole powszechnej i w gimnazjum wprowadzić do nauki rachunków i do nauki matematyki wogóle wielkości wymiarowe, — jest rzeczą dyskusji.

Zamykając swój artykulik, korzystam z okazji, żeby zaznaczyć, że poruszona przeze mnie sprawa jest tylko pewnym ważnym, ale zawszeć szczegółem sprawy ważniejszej i szerszej — sprawy niedostosowania nauki matematyki w szkołach ogólnokształcących do wymogów życia współczesnego.

Na terenie właśnie szkoły zawodowej występują jaskrawo te niedomagania szkoły ogólnokształcącej. A szkoła zawodowa jest wszakże w dużym stopniu miernikiem, wyrazicielem tych wymogów życia współczesnego.

Na terenie szkoły zawodowej występuje jaskrawo przedewszystkiem niepokojące systematyczne obniżanie się poziomu przygotowania i umiejętności matematycznej, zastraszająca bezradność uczniów przy rozwiązywaniu najprostszych nawet zadań.

Jedną z ważniejszych przyczyn tych objawów widzę w owem właśnie niedostosowaniu się szkoły ogólnokształcącej do wymogów życia współczesnego pod względem wyboru materjału naukowego i pod względem ujęcia samego nauczania.

Byłoby wysoce pożądanem, żeby *Parametr* otworzył swe łamy tej ważnej sprawie w szeregu artykułów dyskusyjnych.

Artykulik niniejszy spełniłby swe zadanie, gdyby wywołał tę dyskusję.

DR. STEFAN STRASZEWICZ (Warszawa).

Uwaga o podstawowych układach związków między elementami trójkąta.

W podręcznikach trygonometrji podawane bywa twierdzenie, że trzy układy równań między bokami a, b, c a przeciwległemi kątami A, B, C trójkąta, a mianowicie:

a) twierdzenie sinusów wraz ze związkiem $A + B + C = \pi$,
b) 3 równania, wyrażające t. zw. twierdzenie o rzutach dla każdego z boków trójkąta,
c) 3 równania, wyrażające t. zw. twierdzenie o kwadracie boku dla każdego z boków trójkąta,

stanowią układy równań równoważne.

W tej formie twierdzenie byłoby nieścisłe, to też zakłada się ponadto, że a, b, c są dodatnie, a A, B, C zawarte między 0 i π.

Rzecz w tem, że żaden z układów równań, wymienionych pod a), b) i c), nie daje jeszcze warunków dostatecznych na to, aby liczby a, b, c, A, B, C były elementami trójkąta.

Dokładniejsze zbadanie kwestji prowadzi do ustalenia następujących twierdzeń.

I. Aby liczby a, b, c, A, B, C wyrażały odpowiednio boki i przeciwległe kąty trójkąta, jest koniecznem i dostatecznem, iżby spełniały one układ zależności

(1) $A + B + C = \pi$

(2) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

(3) $A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0,$

(4) $a > 0.$

Powyższy układ warunków jest nieprzywiedlny.

D o w ó d. *Konieczność* tych warunków wynika z podstawowych własności trójkąta.

Aby wykazać ich *dostateczność*, zauważmy, że wobec (1), (3) i (4) mamy $a > 0$, $B > 0$, $C > 0$, $B + C < \pi$, więc istnieje trójkąt o boku a i kątach przyległych B i C. Trzeci kąt tego trójkąta niech będzie równy A_1, boki przeciwległe do B i C niech będą odpowiednio równe b_1 i c_1.

Ze związków $A_1 + B + C = \pi$ oraz (1) wynika $A_1 = A$, stąd zaś oraz ze związków $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b_1}{\sin B}$ i (2) wynika $b_1 = b$. Podobnie otrzymamy $c_1 = c$.

Mamy jeszcze udowodnić *nieprzywiedlność* układu związków (1)—(4), t. zn. dowieść, że żaden z nich nie wynika z pozostałych. Przypuśćmy, że liczby a, b, c, A, B, C spełniają wszystkie te związki. Łatwo stwierdzić, że liczby takie istnieją; wynika to zresztą z powyższego dowodu dostateczności. Wówczas:

1. Liczby a, b, c, A, B, $C + 2\pi$ spełniają wszystkie związki układu z wyjątkiem (1); związek (1) jest więc niezależny od pozostałych.

2. Liczby a, $2b$, $2c$, A, B, C spełniają wszystkie związki układu z wyjątkiem $\dfrac{a}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}$; stąd wynika niezależność tego związku od pozostałych; podobnie stwierdzimy niezależność związku $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

3. Liczby a, b, c, $A - 2\pi$, $B + 2\pi$, C spełniają wszystkie związki układu z wyjątkiem warunku $A > 0$; jest on zatem niezależny od pozostałych; podobnie będzie dla $B > 0$ i $C > 0$.

4. Liczby $-a$, $-b$, $-c$, A, B, C spełniają wszystkie związki układu z wyjątkiem $a > 0$; i ten warunek jest więc niezależny od pozostałych.

Twierdzenie I udowodniliśmy więc całkowicie.

II. Aby liczby a, b, c, A, B, C wyrażały odpowiednio boki i przeciwległe kąty trójkąta, jest koniecznem i dostatecznem, iżby spełniały one układ zależności:

$$(1)\quad \begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B, \\ b &= c\cos A + a\cos C, \\ c &= a\cos B + b\cos A, \end{aligned}$$

(2) $A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0,$

(3) $A < \pi, \quad B < \pi, \quad C < \pi,$

(4) $a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$

Powyższy układ warunków jest nieprzywiedlny.

D o w ó d. *Konieczność* warunków stwierdzamy, jak w I.

Dostateczność. Wobec $a > 0$, $b > 0$, $0 < C < \pi$, istnieje trójkąt o bokach a, b i kącie pomiędzy niemi zawartym C. Trzeci bok tego trójkąta niech równa się c_1, a kąty przeciwległe do a i b niech będą równe A_1 i B_1. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} a &= b\cos C + c_1\cos B_1, \\ b &= c_1\cos A_1 + a\cos C, \\ c_1 &= a\cos B_1 + b\cos A_1. \end{aligned}$$

Z pierwszych dwóch równań oraz z odpowiednich równań (2) otrzymamy

$$\cos B_1 = \frac{c\cos B}{c_1}, \qquad \cos A_1 = \frac{c\cos A}{c_1};$$

podstawiając te wyniki do trzeciego z powyższych równań mamy $c_1^2 = c(a\cos B + b\cos A)$; stosując trzecie z równań (1), otrzymamy $c_1^2 = c^2$, a ponieważ $c_1 > 0$, a wobec (4) jest też $c > 0$, przeto $c_1 = c$. Poprzednio otrzymane równania dają teraz $\cos B_1 = \cos B$ i $\cos A_1 = \cos A$, skąd po uwzględnieniu (2) i (3) wypadnie: $B_1 = B$ i $A_1 = A$.

Nieprzywiedlność. Przypuśćmy, że liczby a, b, c, A, B, C spełniają wszystkie związki (1) — (4). Wówczas:

1. Liczby $2a$, b, c, A, B_1, C_1, gdzie liczby B_1 i C_1 są takie, że $0 < B_1 < \pi$, $0 < C_1 < \pi$ i $\cos B_1 = \frac{1}{2}\cos B$, $\cos C_1 = \frac{1}{2}\cos C$, spełniają wszystkie związki układu z wyjątkiem pierwszego z równań (1).

2. Liczby a, b, c, $A - 2\pi$, B, C spełniają wszystkie związki (1) — (4) z wyjątkiem $A > 0$.

3. Liczby a, b, c, $A + 2\pi$, B, C spełniają wszystkie związki (1) — (4) z wyjątkiem $A < \pi$.

4. Liczby $-a$, b, c, A, $\pi - B$, $\pi - C$ spełniają wszystkie związki (1) — (4) z wyjątkiem $a > 0$.

Z uwagi na symetrję układu związków (1) — (4), z przykładów powyższych wynika niezależność każdego z tych związków od pozostałych.

III. Aby liczby a, b, c, A, B, C wyrażały odpowiednio boki i przeciwległe kąty trójkąta, jest koniecznem i dostatecznem, iżby spełniały one układ warunków:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$
$$(1) \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$
$$(2) \quad A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0,$$
$$(3) \quad A < \pi, \quad B < \pi, \quad C < \pi,$$
$$(4) \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Powyższy układ związków jest nieprzywiedlny.

D o w ó d. *Konieczność* stwierdzamy, jak w I.

Dostateczność. Tak samo, jak w twierdzeniu II, rozważamy trójkąt o elementach, a, b, c_1, A_1, B_1, C. Wtedy $c_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; stąd wobec (1) $c_1^2 = c^2$, a dalej wobec (4) $c_1 = c$; pierwszy wzór (1) w połączeniu z odpowiednim wzorem dla trójkąta A, B, C daje teraz $\cos A_1 = \cos A$, więc wobec (2) i (3) musi być $A_1 = A$. Podobnie wypadnie $B_1 = B$.[1])

Nieprzywiedlność. Niech liczby a, b, c, A, B, C spełniają wszystkie związki układu (1) — (4). Wówczas liczby $a, b, c, \frac{1}{2}A, B, C$ spełniają wszystkie związki tego układu z wyjątkiem pierwszego równania (1). Stąd wynika niezależność każdego z równań (1) od reszty związków układu. Niezależność każdego z pozostałych związków układu (1) — (4) wykazujemy tak samo jak w twierdzeniu II.

Z dowiedzionych twierdzeń można wysnuć następujący wniosek:

Trzy układy związków, podane w twierdzeniach I, II, III, są równoważne.

Każdy z tych układów można zatem przyjąć za podstawę trygonometrji. — Dowód tej równoważności możnaby oczywiście przeprowadzić bezpośrednio drogą rachunkową. Ćwiczenie to pozostawiamy Czytelnikom.

JAN SNIADECKI (1817).

O potrzebie gruntownego poznania początków matematyki.

Nikt zapewne nie wątpi o wielkich matematyki pożytkach i przysługach: ale z początkową tylko téy nauki znaiomością, żaden kray ani do tych pożytków nie trafi, ani do rzędu narodów gruntownie uczonych nigdy należeć nie będzie. Żeby zaś do głębszych wiadomości matematycznych przebrać się pomyślnie, i uczuć tę roskosz umysłu, iaką napełniaią myślącego człowieka, trzeba ie koniecznie w początkowych zasadach obiąć gruntownie.

Dla tego było zamiarem moiego życia, ułatwić młodzi kraiowey wstęp i drogę do tych głębokich umieiętności: ale przygody kraiowe miotaiąc mną po rozmaitych trudach, ani z moiém powołaniem ani z moiemi chęciami niezgodnych, nie dały mi doprowadzić do końca tak potrzebnego przedsięwzięcia. Przy schyłku życia chciałbym ieszcze coś zrobić dla tey młodzi, któréy dobro i pożytki nigdy mnie nie przestaną żywo obchodzić.

Z przedmowy do TRYGONOMETRYI KULISTEY.

[1]) Czytelnik zechce sprawdzić, że w dowodach dostateczności układów w twierdzeniach II i III trzeba było korzystać z każdego z 12 związków odpowiedniego układu.

DR. ANTONI HOBORSKI, Prof. Akademji Górniczej (Kraków).

Dowód niewprost, a szkoła średnia[1]).

§ 1. Dwie postacie dowodu zna matematyka: dowód bezpośredni (wprost) i dowód niewprost, pośredni, zwany także dowodem *per reductionem ad absurdum.*

Z tych postaci, dowód pośredni (apagogiczny) jest łatwiejszy, daje bowiem punkt wyjścia[2]).

Dla przykładu weźmy twierdzenie o kole F e u e r b a c h a czyli kole 9 punktów. Twierdzenie to podzielimy na dwie części.

1) Jeżeli ABC jest danym trójkątem, $H_1H_2H_3$ są spodkami wysokości, $S_1S_2S_3$ środkami boków, H punktem przecięcia się wysokości (*ortocentrum*), $A'B'C'$ środkami odcinków AH, BH, CH, to istnieje koło, przechodzące przez dziewięć punktów $H_1H_2H_3S_1S_2S_3A'B'C'$. Środek O_9 tego koła jest środkiem odcinka HO, przyczem O oznacza środek koła, opisanego na trójkącie ABC.

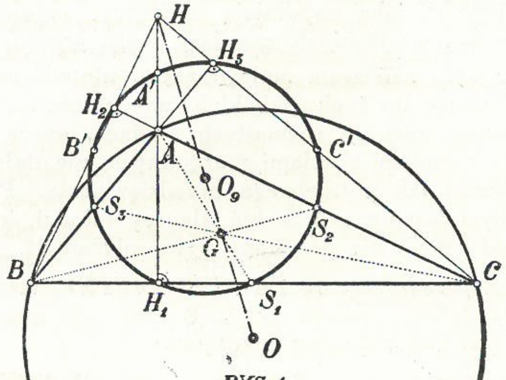
2) Dla każdego trójkąta punkty H (ortocentrum), G (środek ciężkości), O (środek koła opisanego) i O_9 (środek koła F e u e r b a c h a) leżą na jednej prostej i tworzą podział harmoniczny.

Na pierwszy rzut oka niewiadomo, od czego dowód zacząć; niejednokrotnie można szukać dowodu, zaczynając go w kilka sposobów i porzucając obraną drogę.

W przypadku tw. 1 ułatwia nam poszukiwanie dowodu końcowe zdanie, że O_9 jest środkiem odcinka HO. Bez tej uwagi niejeden z nas nie umiałby rozpocząć dowodu.

[1]) Odczyt wygłoszony dnia 26 lutego 1931 r. na Kursie matematycznym dla nauczycieli szkół średnich w Krakowie.

[2]) Zob. J. S l e s z y ń s k i: *Teorja Dowodu.* Tom I, str. 157.



RYS. 1.

Oto szkicowany dowód tw. 1. Trójkąt ABH jest podobny do trójkąta OS_1S_2 (bo odpowiednie boki są równoległe); ponieważ $S_1S_2 = \frac{1}{2}AB$, więc $OS_1 = \frac{1}{2}AH$, $OS_2 = \frac{1}{2}BH$. Niech O_9 będzie środkiem odcinka OH. A więc $\triangle A'HO_9$ przystaje do $\triangle O_9S_1O$; tedy $A'O_9 = O_9S_1$. Ponieważ $\triangle A'S_1H_1$ jest prostokątny przy H_1, więc $A'O_9 = O_9H_1$. Ponieważ O jest środkiem koła opisanego, więc $OA = OB = OC$, przeto

$$A'O_9 = \tfrac{1}{2}OA = \tfrac{1}{2}OB = B'O_9 = \tfrac{1}{2}OC = O_9C' \text{ i t. d.}$$

Aby dla tw. 2 wykazać, że środek ciężkości G leży na prostej HO, wykażemy (oznaczając przez G punkt przecięcia prostych AS_1 i HO), że trójkąty AGH i CGS_1 są podobne, co wynika z równości kątów; ponieważ — jak poprzednio wykazaliśmy — $OS_1 = \frac{1}{2}AH$, więc $GS_1 = \frac{1}{2}AG$, co już wykazuje, że G jest środkiem ciężkości trójkąta. Zarazem z ostatniego podobieństwa wynika, że $OG = \frac{1}{2}HG$.

Punkty HG, OO_9 tworzą podział harmoniczny (czyli są harmonicznie sprzężone), to znaczy, że

$$\frac{\overrightarrow{OH}}{\overrightarrow{OG}} : \frac{\overrightarrow{O_9H}}{\overrightarrow{O_9G}} = -1,$$

Wykazać to nietrudno, bo O_9 jest środkiem odcinka OH; punkt G dzieli ten odcinek w stosunku $2:1$ ($OG = \frac{1}{3}OH$).

§ 2. Zupełnie inaczej przedstawia się sytuacja nasza, gdy próbujemy dowodu niewprost. Weźmy dla przykładu elementarne twierdzenie. Wiadomo, że logarytmem zwyczajnym liczby (a) nazywamy pierwiastek równania wykładniczego

(1) $$10^x = a.$$

Otóż pytanie: *ile liczba* (a) *ma logarytmów zwyczajnych?* redukuje się do pytania: *ile pierwiastków ma równanie* (1) *przy danej liczbie* (a)? W odpowiedzi dowodzimy twierdzenia, że równanie (1) albo nie ma wcale pierwiastka, albo ma tylko jeden pierwiastek, co krótko także tak wysłowimy: *równanie* $10^x = a$ *ma co najwyżej jeden pierwiastek.* Czy ma jeden pierwiastek, czy nie ma pierwiastków, zależy od liczby (a). A mianowicie dokładniejsze jest twierdzenie następujące:

Jeżeli jest $a \leqslant 0$, *to równanie* (1) *nie ma pierwiastka; gdy jest* $a > 0$, *to równanie* (1) *posiada dokładnie jeden pierwiastek.*

Zajmiemy się dowodem powyżej podanego twierdzenia, mniej dokładnego, i to niewprost. W tym dowodzie oprzemy się na dwóch twierdzeniach.

I. Jakąkolwiek jest liczba (x), *to jest* $10^x > 0$.

II. Gdy jest $u > 0$, *to jest* $10^u > 1$.

Jakże rozpoczniemy dowód niewprost, że równanie ma co najwyżej jedno rozwiązanie przy każdej danej liczbie (a)? W tym względzie niema żadnego kłopotu. Przypuścimy na chwilę, że twierdzenie nie jest prawdziwe, istnieje więc taka liczba (a_0), że równanie $10^x = a_0$ ma więcej, niż jeden pierwiastek, a więc co najmniej dwa. Niech niemi będą liczby x_1 i x_2 i niech $x_1 > x_2$; stąd wynika, że $10^{x_1} = a_0$, $10^{x_2} = a_0$, przeto jest $10^{x_2} = 10^{x_1}$, ale $10^{x_2} > 0$ na mocy tw. I, więc wolno podzielić przez 10^{x_1}, i otrzymamy $10^{x_1 - x_2} = 1$. Jeżeli więc nieprawdą, byłoby twierdzenie, które mamy udowodnić, to istniałaby liczba $u = x_2 - x_1 > 0$ taka, że $10^u = 1$, ale to jest widocznie sprzeczne z twierdzeniem II. Doszliśmy więc do sprzeczności — do „absurdu". Tem samem uważamy twierdzenie za udowodnione — za słuszne.

§ 3. Dowody niewprost są dość częste, zwróciły przeto uwagę filozofów i matematyków; niektórzy nawet, — jak zobaczymy — niesłusznie, uważali dowód niewprost za mniej wartościowy, niż dowód wprost. Z zarzutami tego rodzaju rozprawia się B o l z a n o (z zawodu profesor teologji) w IV tomie swojej *„Wissenschaftslehre"* (str. 278).

Ogólna postać dowodu niewprost jest następująca. Załóżmy że mamy udowodnić twierdzenie matematyczne, któremu można zawsze nadać postać: *„jeżeli jest p, to jest q"* czyli *„z p wynika q"*. Twierdzimy, że zdanie to jest prawdziwe. Aby to dobrze zrozumieć, zastanówmy się nad tem, co to znaczy, że zdanie „*z p wynika q*“ jest prawdziwe.

Otóż (*p*) może być prawdą lub fałszem — i podobnie (*q*). Wobec tego są cztery możliwości, zestawione w następującej tabelce:

p	*q*
prawda	prawda
prawda	fałsz
fałsz	prawda
fałsz	fałsz

Rozejrzenie się w tej tabelce będzie nadzwyczaj ułatwione, gdy uprzytomnimy sobie dwie prastare, bo jeszcze Arystotelesa sięgające zasady:

a) *z prawdy tylko prawda może wynikać*[4]);

b) *z fałszu wynika prawda lub fałsz*[4]).

Wobec tego uważamy twierdzenie „*z p wynika q*“ za słuszne jedynie w następujących trzech przypadkach:

p	*q*
prawda	prawda
fałsz	prawda
fałsz	fałsz

Gdyby zaś było:

p	*q*
prawda	fałsz

to twierdzenie „*z p wynika q*“ uważamy za fałszywe. Zarazem widzimy, że dowód prawdziwości twierdzenia „*z p wynika q*“ ma za cel wykazać, że gdy (*p*) jest prawdą, to (*q*) jest prawdą, gdyż wypadki: „*gdy p jest fałszem, to q jest prawdą lub fałszem*“ są nieinteresujące. Otóż dowód niewprost słuszności twierdzenia „*z p wynika q*“ rozpoczynamy dylematem: albo twierdzenie to jest słuszne, albo jest fałszem. Dylemat ten jest dysjunkcją zupełną, t. zn. jedna i tylko jedna część dylematu jest słuszną.

Aby więc wykazać, że twierdzenie nasze jest słuszne, wykażemy, że założenie chwilowe, iż jest fałszem, prowadzi do absurdu, do wyniku niezgodnego z prawdą. Ale zauważmy, że fałsz może tylko z fałszu wynikać. A więc założenie chwilowe, że nasze twierdzenie jest fałszywe, jest fałszem, a więc twierdzenie jest słuszne, c. b. d. u.

[4]) Oczywiście — przy prawidłowem rozumowaniu, co milcząco zakładamy.

Zauważmy jeszcze, że na mocy poprzednich wyjaśnień umiemy natychmiast sformułować zdanie: twierdzenie „*z p wynika q*“ jest fałszem; znaczy to bowiem, że fałszem są trzy przypadki:

p	*q*
prawda	prawda
fałsz	prawda
fałsz	fałsz

a ponieważ poprzednio podane cztery przypadki tworzą dysjunkcję zupełną, więc dochodzimy do tego, że prawdziwym ma być czwarty przypadek:

p	*q*
prawda	fałsz

czyli przypadek

p	*nie-q*
prawda	prawda

Zakładamy więc chwilowo, że słusznem jest twierdzenie: „*z p wynika nie-q*“. Widzimy tedy, że dowód niewprost polega na tem, że zaprzeczamy wnioskowi (następnikowi) twierdzenia. Tem samem mamy określony punkt wyjścia dowodu. Z powyższego przedstawienia postaci dowodu widoczne, że dowód niewprost jest ze stanowiska logiki zupełnie poprawnym. I nie może być inaczej, gdy — jak to słusznie zauważył prof. J. Sleszyński — dowód niewprost twierdzenia: „*z p wynika q*“ jest dowodem wprost twierdzenia: „*z nie-q wynika nie-p*“. Stosunek dwu tych twierdzeń: „*z p wynika q*“ oraz „*z nie-q wynika nie-p*“ jest — jak wiadomo — bardzo prosty: albo oba te twierdzenia są równocześnie słuszne, albo oba równocześnie fałszywe, jak to widać z następujących zestawień:

p	*q*	*nie-q*	*nie-p*
prawda	prawda	fałsz	fałsz
fałsz	prawda	fałsz	prawda
fałsz	fałsz	prawda	prawda

p	*q*	*nie-q*	*nie-p*
prawda	fałsz	prawda	fałsz

Twierdzenie: „*z nie-q wynika nie-p*“ nazywamy[5]) twierdzeniem, otrzymanem przez kontrapozycję z twierdzenia: „*z p wynika q*“.

[5]) Zob. J. Sleszyński: *Teorja Dowodu.* Tom I i II.

W dowodzie niewprost można niekiedy natrafić na bardzo interesujący przypadek. Oznaczmy przez (*A*) twierdzenie „*z a wynika b*". Chodzi nam o to, czy to twierdzenie jest prawdą, czy też fałszem. Załóżmy, że udało nam się udowodnić twierdzenie „*z A wynika nie-A*". Stąd zaraz ocenimy, czy (*A*) jest prawdą, czy fałszem. Mamy bowiem:

A	*nie-A*
prawda	fałsz
fałsz	prawda

Ponieważ z prawdy może tylko prawda wynikać, więc tylko drugi wiersz tabelki jest słuszny, czyli (*A*) jest fałszem.

Dla ilustracji przytoczymy przykład Bolzany[6]). Rozważmy zdanie: „*wszystkie zdania są fałszywe*". Chodzi o to, by je zbić, t. zn. wykazać, że jest fałszywe. Otóż to jest zdanie, a więc i ono jest fałszywe, czyli nie wszystkie zdania są fałszywe. A więc ze zdania (*A*) wynika (*nie-A*). Wobec tego sceptycyzm zupełny musi uchodzić za błędny. Prof. J. Sleszyński dodaje jednak[7]), że bezwzględny sceptyk mógłby na to odpowiedzieć, że nie uznaje trybu syllogizmu *Barbara*, przy pomocy którego uzyskał tu twierdzenie, że z (*A*) wynika (*nie-A*).

§ 4. Pragnę jeszcze nadmienić, że można sobie zadać pytanie następujące: czy można uniknąć dowodu niewprost, czy może każdy dowod niewprost daje się zamienić na dowód wprost?

Sprawę tę należy uważać za dotąd nierozstrzygniętą. Wprawdzie Bolzano w IV tomie swojej *Wissenschaftslehre* (str. 278, 2 *Anmerkung*) twierdzi, że każdy dowód niewprost, zawarty w *Elementach* Euklidesa, udało mu się zamienić na dowód wprost. Tego samego zdania, co Bolzano, był już Arystoteles (*Anal. prior II*, 14). Leibniz (*Nouv. Ess.* IV, 8) wątpił w możliwość usunięcia dowodu niewprost[8]). Jednakowoż, jak długo nie mamy ogólnego i poprawnego dowodu tezy Arystotelesa — Bolzany, tak długo musimy uważać rzecz za nierozstrzygniętą.

O „kontrprzykład" nie tak łatwo — mojem zdaniem. Jeżeli bowiem ktoś daje przykład dowodu niewprost, o którym twierdzi, że nie daje się przerobić na dowód wprost, to zawsze może powstać pytanie, czy się komuś innemu ta rzecz nie powiedzie.

Bolzano podaje następujący przykład zamiany dowodu niewprost na dowód wprost. Wiadomo, że Euklides dowodem niewprost (*Elementa* ks. I, tw. 6) udowodnił, że jeżeli w trójkącie kąty $\alpha = \beta$, to przeciwległe boki $a = b$. Dowód

[6]) B. Bolzano: *Wissenschaftslehre*. Tom IV, str. 282.
[7]) *Teorja Dowodu*. Tom I, str. 161.
[8]) Cytat według Bolzany.

u Euklidesa sprowadza się do absurdu, że całość jest przystająca do swej części. Ale można podać inny dowód, również niewprost. Załóżmy, że udowodniliśmy dwa twierdzenia dla trójkąta:

1) *jeżeli* $a = b$, *to* $\alpha = \beta$;
2) *jeżeli* $a > b$, *to* $\alpha > \beta$.

To drugie twierdzenie daje nam bezpośredni dowód twierdzenia:

3) *jeżeli* $a < b$, *to* $\alpha < \beta$;

(gdyż $a < b$ daje $b > a$, więc $\beta > \alpha$, skąd $\alpha < \beta$).

Udowodnijmy twierdzenie: „*jeżeli w trójkącie jest* $\alpha = \beta$, *to jest* $a = b$". Dowodzi się zwykle tego twierdzenia niewprost. Wypowiada się dysjunkcję zupełną: *albo* $a = b$, *albo* $a > b$, *albo* $a > b$. Ale nie może być $a > b$, bo na mocy poprzedniego wynika stąd $\alpha > \beta$; podobnie nie może być $a < b$. A więc być musi $a = b$. Z łatwością można uniknąć dowodu niewprost. Mianowicie — według Bolzany — można tak postępować: Skoro jest $\alpha = \beta$, więc nie jest ani $\alpha > \beta$, ani $\alpha < \beta$. Ale tw. 2 przez kontrapozycję daje: *z nie*-($\alpha > \beta$) *wynika nie*-($a > b$); tw. 3 przez kontrapozycję daje: „*z nie*-($\alpha < \beta$) *wynika nie*-($a < b$)". Wobec tego z $\alpha = \beta$ wynika *nie*-($a > b$) i *nie*-($a < b$), przeto jest $a = b$.

§ 5. Sprawę, czy zawsze można dowód niewprost zastąpić dowodem wprost, podjął na nowo Hölder w r. 1929 rozprawą, drukowaną w *Leipziger Berichte* (81 tom, zesz. IV, str. 201-216) p. t. *Der indirekte Beweis in der Mathematik*[9]). Hölder broni zapatrywania przeciwnego poglądom Bolzany; w rozumowaniach Bolzany dopatruje się *petitio principii* (i to — mojem zdaniem — niesłusznie). Wywody swoje popiera Hölder kilku przykładami, z których jeden jest bardziej interesujący. Otóż ten przykład, — który tu powtórzymy, — opiewa następująco: opierając się na aksjomacie ciągłości Dedekinda, daje się udowodnić aksjomat ciągłości Archimedesa. Dla lepszego zrozumienia rzeczy przypominamy oba aksjomaty.

Aksjomat ciągłości Dedekinda brzmi następująco: jeżeli każdy punkt prostej należy do jednej z dwóch mnogości *M* i *N*, jeżeli obie mnogości są nieskończenie liczne i jeżeli (przyjmując prostą za poziomą) każdy punkt mnogości *M* leży na lewo od każdego punktu mnogości *N*, to istnieje punkt separacyjny tych mnogości, należący już to do *M*, już to do *N*, i taki, że każdy punkt na lewo od niego należy do mnogości *M*, a każdy punkt na prawo od niego należy do mnogości *N*.

Aksjomat ciągłości Archimedesa opiewa w sposób następujący: wychodząc z dowolnego punktu prostej i odkładając

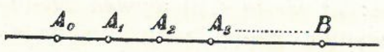
[9]) W r. 1930 ukazało się w *Leipziger Berichte* uzupełnienie Höldera do jego wyżej cytowanej pracy.

od niego w prawo odcinki jednakowej a skończonej długości (t. zw. odcinki właściwe) można skończoną ilością tych odcinków przekroczyć każdy punkt tej prostej.

Otóż Hölder wykazał, że z aksjomatu ciągłości Dedekinda wynika jako prawdziwy aksjomat ciągłości Archimedesa.

§ 6. Dowód Höldera brzmi następująco:

Wychodząc z punktu A_0 odkładamy równe odcinki $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \ldots$. Twierdzimy, że odkładając w ten sposób skończoną ilość odcinków, przekroczymy każdy zgóry dany punkt B prostej, którą przyjmiemy jako poziomą. Oznaczmy przez M następującą mnogość punktów tej prostej: punkt P tej prostej zaliczamy do mnogości M, jeżeli jest albo jednym z punktów $A_0, A_1, A_2, \ldots$ albo leży na lewo przynajmniej od jednego z punktów $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Twierdzenie nasze, że równemi odcinkami $A_0A_1, A_1A_2, \ldots$ potrafimy każdy punkt B prostej przekroczyć, znaczy widocznie teraz, że wszystkie punkty prostej należą do mnogości M, i to właśnie mamy udowodnić.



RYS. 2.

Dla zrozumienia dalszego dowodu przypomnę dwa pojęcia z teorji mnogości: 1) pojęcie *punktu skupienia*, 2) pojęcie *punktu wewnętrznego* mnogości. W tym celu oznaczmy przez R dowolną, byle nieskończenie liczną mnogość punktów na prostej.

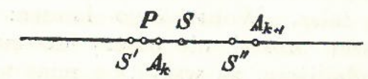
Punkt S prostej (niezależnie od tego, czy należy do mnogości R, czy też do niej nie należy) nazywa się *punktem skupienia* mnogości R, jeżeli każde otoczenie punktu S zawiera przynajmniej jeden punkt mnogości R. Np. niech mnogość R składa się z punktów osi x o odciętej $\frac{1}{n}$, gdzie (n) oznacza dowolną liczbę naturalną. Mnogość ta ma liczbę *zero* jako punkt skupienia, gdyż w każdem otoczeniu punktu *zero* znajdzie się — i to nawet nieskończenie wiele — punktów mnogości R. Liczba *zero* jednak do mnogości R nie należy.

Przejdźmy do drugiego pojęcia z teorji mnogości. Punkt W nazywamy *punktem wewnętrznym* mnogości R, jeżeli sam do mnogości R należy i jeżeli znajdzie się takie otoczenie punktu W, że wszystkie punkty otoczenia należą również do mnogości R. Np. niech mnogością R będą wszystkie liczby rzeczywiste od 0 do 1 włącznie; punktem wewnętrznym tej mnogości jest każdy punkt (x) o własnościach $0 < x < 1$.

Te dwa pojęcia z teorji mnogości pozwolą nam wysłowić pomocnicze twierdzenie Höldera, które brzmi: *Każdy punkt*

skupienia rozważanej poprzednio mnogości M jest równocześnie punktem wewnętrznym mnogości M.

Dla dowodu tego twierdzenia załóżmy, że punkt S jest punktem skupienia mnogości M. Weźmy otoczenie punktu S długości A_0A_1 i takie, żeby punkt S był środkiem tego otoczenia. Ponieważ S jest punktem skupienia mnogości M, więc istnieć będzie w każdem, a więc też w obranem otoczeniu (oczywiście na lewo od punktu S) punkt P[10]), należący do mnogości M.



RYS. 3.

Wobec tego na prawo od punktu P znajdzie się jakiś punkt A^k albo P schodzi się z jakimś punktem A_k, bo tylko dlatego punkt P należy do mnogości M. Jeżeliby punkt A_k leżał też na prawo od punktu S, to w takim razie wszystkie punkty na lewo od punktu A_k należałyby do mnogości M. I tem samem punkt S byłby punktem wewnętrznym mnogości M, co mieliśmy udowodnić. Co innego, gdyby punkt A_k albo się schodził z punktem S, albo leżał na lewo od punktu S (między P i S) lub schodził się z P; wtedy bierzemy do pomocy punkt A_{k+1}, który leży na prawo od prawego końca rozważanego otoczenia, i wskutek tego wszystkie punkty tego otoczenia punktu S muszą należeć do mnogości M, przez co znów wynika, że punkt S jest punktem wewnętrznym mnogości M. To twierdzenie Höldera będzie pomocnem w dalszym toku dowodu, który jest dowodem niewprost.

Otóż twierdzimy — jak to wyżej powiedzieliśmy — że wszystkie punkty naszej prostej należą do mnogości M. Hölder dowodzi tego niewprost. A więc przypuśćmy, że jakiś punkt naszej prostej nie należy do mnogości M. Przyjmując to założenie, (jak zobaczymy) dojdziemy do sprzeczności.

Oznaczmy wogóle przez N mnogość tych punktów naszej prostej, które do mnogości M nie należą. Widoczne, że wszystkie punkty mnogości N leżą na prawo od wszystkich punktów mnogości M. Ponieważ według chwilowego przypuszczenia mnogość N nie jest pustą, bo przynajmniej jeden punkt do niej należy, (teraz ponadto wiemy, że wszystkie punkty na prawo od niego należą również do mnogości N), więc stąd wynika, że i mnogość N jest nieskończenie wiele liczna. Stąd i wobec przyjętego za prawdziwy aksjomatu ciągłości Dedekinda

[10]) Gdyby punkt P leżał na prawo od S, to wszystkie punkty na lewo od P należałyby do M, i przeto S byłby widocznie punktem wewnętrznym; a więc ten przypadek byłby banalnym.

wynika, że istnieje separacyjny punkt S obu mnogości M i N. A więc istnieje punkt taki, że wszystkie punkty na lewo od niego należą do mnogości M, a wszystkie punkty na prawo od niego należą do mnogości N. Stąd natychmiast wynika, że punkt separacyjny S jest punktem skupienia tak mnogości M, jak i mnogości N. Ale poprzednio udowodnione twierdzenie Höldera orzeka, że punkt skupienia mnogości M, a więc punkt separacyjny S jest punktem wewnętrznym mnogości M, przeto nie może być punktem skupienia mnogości N. Tem samem natrafiliśmy na sprzeczność, na fałsz. Wobec tego fałszem było założenie, że jakiś punkt naszej prostej nie należy do mnogości M, a więc przez to udowodniliśmy, że wszystkie punkty naszej prostej należą do mnogości M, czyli udowodniliśmy aksjomat ciągłości Archimedesa, przyjmując aksjomat ciągłości Dedekinda za prawdziwy.

Hölder twierdzi, że tego dowodu niewprost nie można zastąpić dowodem wprost. Tymczasem ostatnie twierdzenie wydaje mi się niesłusznem, gdyż po kilku próbach udało mi się przerobić dowód niewprost na dowód wprost.

Wobec braku ogólnego dowodu sprawę możliwości usunięcia w każdym wypadku dowodu niewprost należy uważać za nierozstrzygniętą.

§ 7. Rozważmy wreszcie sprawę dowodu niewprost w szkole średniej. Ponieważ, jak już wiemy, dowód niewprost wcale nie jest gorszy pod względem logicznym od dowodu wprost, przeto zupełnie jasne, że w szkole średniej częsty robi się z niego użytek. Jak powiedziałem, ma on tę zaletę, że daje punkt zaczepienia, punkt rozpoczęcia dowodu, co uczniowi ogromnie ułatwia udowodnienie twierdzenia, i to tembardziej, że musimy stać na stanowisku, iż w wyższych klasach szkoły średniej znajomość matematyki nietylko polega na znajomości twierdzeń i przyswojeniu sobie techniki rachunkowej, ale i na umiejętności dowodzenia twierdzeń (jeżeli nie wszystkich, to przynajmniej łatwiejszych). Otóż dowód niewprost rzecz tę w wysokim stopniu ułatwia. Wskazując na cytowany przykład przeistoczenia dowodu niewprost na dowód wprost według Bolzany, możnaby w łatwiejszych wypadkach żądać od ucznia, żeby wyszukany przez siebie dowód niewprost przerobił na dowód wprost. Będzie to piękne ćwiczenie matematyczne, które — rzec można — utwierdzi wiarę i zaufanie w dowody niewprost, gdyż trudno przypuścić, żeby poprzednio podany przeze mnie wywód logiczny o dowodzie niewprost można było w całości podać uczniom w klasie V lub VI, choć pewne wskazówki o dylemacie, jak i uwaga zasadnicza, że fałsz tylko z fałszu wynika, będą konieczne i w piątej czy w szóstej klasie gimnazjalnej.

BIBLJOGRAFJA

STEFAN KULCZYCKI (Warszawa).

O nowej książce dla miłośników matematyki.

= VON ZAHLEN UND FIGUREN | Proben mathematischen Denkens | für Liebhaber der Mathematik | ausgewählt und dargestellt | von || Hans Rademacher (Professor der Mathematik an der Universität Breslau) und Otto Toeplitz (Professor der Mathematik an der Universität Bonn || Mit 129 Textfiguren | Berlin | Verlag von Julius Springer | 1930 | For. 23 $\times$ 15. Str. VI + 164, fig. 129. Cena w oprawie Mk. 9,60.

Pomysł nowy, oryginalny, ciekawy: człowiekowi, nie mającemu przygotowania fachowego, pokazać coś *„rzeczywiście matematycznego"*, przedłożyć mu próbki tego, co składa się na matematykę, — a ma wewnętrzną wartość dla samego siebie, a nie dla zastosowań do innych nauk, — przez to zaś rozprasuje niechęć ku matematyce.

Autorowie wierzą, że liczba ludzi zdolnych do recepcji matematycznych rozumowań niemniejszą jest od liczby tych, których nazywamy muzykalnymi, a którzy, nie będąc w stanie komponować, odczuwają muzykę i znajdują w niej przyjemność lub nawet radość. Podobne *„przeżywanie"* matematyki też jest możliwe. Wielkie teorje naukowe znacznego wymagają wyszkolenia, na które nie każdy się zdobędzie. Ale i nie każdy, lubiący muzykę, ogarnia budowę symfonji. Obok wielkich utworów muzycznych istnieją jednak małe pieśni, w których żyje wspaniałość genjuszu, widoczna i dostępna wszystkim. *„Takie drobne pieśni można wybrać i z matematyki."* Autorowie zamierzyli dać szereg takich matematycznych szkiców — tematów zrozumiałych łatwo i stanowiących całość w sobie. Nie liczą na niemal żadne przygotowanie: najprostsze początki algebry i geometrji wystarczają. Czytelnik może nie pamiętać, czego się uczył w szkole — logarytmów, trygonometrji. Chwilami odnosi się wrażenie, że — zdaniem Autorów — lepiej, gdy nie pamięta. Nieufnie odnoszą się prof. H. Rademacher i O. Toeplitz do nauczania szkolnego. Na str. 10 czytamy: *„Kwestja zagadnień na maximum obciążona jest rozmaitemi wspomnieniami z nauczania szkolnego, które nietylko nie są pomocne dla naszych celów, lecz stanowią wprost przeszkodę"*. Ten niechętny stosunek do wiadomości dawniej zdobytych, to wyraźne zaznaczenie, że czytelnik może zapomnieć przed studjum pewnego paragrafu o treści poprzednich, jest konsekwencją zasadniczego stanowiska Autorów: nacisk pragną położyć nie na fakty, lecz na metody stawiania zagadnień, ich rozwiązywania, na *„Typus der Geschehnisse"*, — jak mówią, — co można przełożyć, tylko mniej dobitnie: na istotę tego, co się w matematyce dzieje.

Owe intencje pokierowały znamiennym doborem treści. Z 26 paragrafów dziełka najwięcej, — bowiem aż 8, — poświęconych jest teorji liczb; ze specjalną predylekcją opracowane są ustępy, tyczące się liczb pierwszych. Naukę o rozmieszczeniu (*Verteilung*) liczb pierwszych nazywają autorowie najbogatszym w zagadnienia, najtrudniejszym i najbardziej aktualnym działem matematyki. Opinja ta jest tem bardziej charakterystyczna, że teorja liczb pierwszych nie jest specjalnością ani jednego z Autorów. Czasy najnowsze przyniosły wspaniały rozkwit teorji liczb wogóle, niezwykłe rozszerzenie jej zakresu zainteresowań, horyzontów i metod, czerpiących ze wszystkich działów matematyki. Nie dotarł jeszcze wpływ bujnej tej twórczości do szkoły średniej i t. zw. matematyki elementarnej, aczkolwiek wiele pomysłów i problematów byłoby zupełnie dostępnych, — ale niewątpliwie dotrze. Teraz jeszcze dydaktyka rozważa i rozbiera kwestje wynikłe z wprowadzenia początków rachunku różniczkowego i całkowego; za źródło tej innowacji można chyba uważać intelektualne prądy połowy XIX w., gwałtowny i olbrzymi rozwój nauk, opartych o zastosowania analizy, i suggestywny wpływ tego szalonego powodzenia.

W książce H. Rademachera i O. Toeplitza niema prób popularyzacji rozdziałików rachunku wyższego, nie spotykamy ani wyrazu, ani pojęcia *pochodnej* lub *całki*, nie oblicza się pola, ani objętości, ba! — nigdzie nie figuruje wyraz *granica*. A mimo to, jak wiele zajmującego materjału! Jeśli programy przyszłości wprowadzą nieco teorji liczb — w dalszym ciągu arytmetyki klas niższych, — dany przez Autorów wykład teorji ułamków okresowych (§ 19) będzie stanowił wzorzec, jak wychodząc z procesu zamiany ułamka zwyczajnego na dziesiętny, z pytań, nasuwających się każdemu uczniowi i nieodmiennie stawianych w każdej klasie, dojść do twierdzenia Fermata w sposób naturalny.

§ 1 podaje euklidesowski dowód istnienia nieskończonej ilości liczb pierwszych, — dowód, który powinienby figurować w programie IV lub V klasy. Nie sprawia on piątoklasistom trudności, jak może zapewnić z własnej praktyki piszący te słowa. Podziw Autorów dla świetności pomysłu Euklidesa jest usprawiedliwiony ze wszech miar. Należałoby wzbudzić go i w uczniach. Trudniej byłoby im ocenić dowód Eulera (§ 17b).

Inne paragrafy z teorji liczb traktują o rozwiązaniu równania $x^2 + y^2 = z^2$ w liczbach całkowitych, o zastosowaniu pomysłu *descente infinie* Fermata do okazania nierozwiązalności w liczbach całkowitych równania $x^4 + y^4 = z^2$ i o paru jeszcze innych tematach.

W § 11 przeprowadzają Autorowie dowód jednoznaczności rozkładu liczby całkowitej na czynniki pierwsze. Nie odstrasza ich subtelność rozumowania; ufają, że czytelnik odczuje jego „melodję". Aby wejrzał zaś w jego nieodzowność logiczną, rozpatrują pojęcie *liczby algebraicznej całkowitej*, a mianowicie liczby $a + b\sqrt{-6}$ (a i b — liczby całkowite), i okazują, że w zbiorze tych liczb twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze nie obowiązuje, a zatem wogóle, a dla liczb maturalnych w szczególności, nie może być uważane za zrozumiałe samo przez się.

Autorowie z odwagą zapału atakują zagadnienia trudne. Naprzykład wcale nie jest łatwy § 22, uzasadniający, że $p_n + 1 < \sqrt{p_1 . p_2 \ldots p_n}$ gdzie $p_1, p_2, p_3, \ldots$ oznacza ciąg wszystkich liczb pierwszych. Można zresztą powątpiewać, czy niewątpliwie dobrze przemyślany wybieg dowodu zasługiwał na umieszczenie go w dziełku.

Najwięcej rozdzialików po teorji liczb (5 artykułów) zajmuje się zagadnieniami *maximum* i *minimum* rozmaitych figur geometrycznych, traktowanemi wyłącznie geometrycznie. W §§ 5 i 6 przedstawione są dowody Schwarza i Fejéra twierdzenia, iż spodkowy trójkąt ma mniejszy obwód od każdego innego trójkąta, wpisanego w trójkąt ostrokątny. Piękny dowód Fejéra został opublikowany po raz pierwszy w tej książce. Dajemy ten paragraf w dosłownem tłómaczeniu w *„Młodym Matematyku"*. Reszta zadań bardziej jest znana.

Na uwagę zasługuje metoda, użyta dla twierdzenia: *ze wszystkich trójkątów, wpisanych w dane koło, największy jest równoboczny*. Sposób często używany korzysta ze spostrzeżenia, że z dwóch trójkątów wpisanych o wspólnej podstawie większy jest równoramienny, i konkluduje: trójkąt, który ma dwa boki nierówne, nie może być największym, a zatem *maximum* realizuje trójkąt równoboczny.

Wnioskowanie to podlega znanemu zarzutowi Weierstrassa. Autorowie unikają tego zarzutu pomysłowo. Niech ABD będzie trój-

kątem wpisanym; niech łuk AD będzie mniejszy od $\frac{1}{3}$ okręgu, a łuk DB niech będzie większy. Trójkąt ABE, w którym łuk $AE = \frac{1}{3}$ okręgu, jak łatwo pokazać, jest wyższy od trójkąta ABD, ma więc pole większe. AE jest równe bokowi trójkąta foremnego wpisanego w koło. Z pośród trójkątów, mających *podstawę* AE, największy jest taki, w którym $EB = BA$, i który oczywiście jest *równoboczny*.

Metoda stosuje się i do wielokąta.

Topologicznym zagadnieniom poświęcono 4 ustępy. § 12 o *zagadnieniu 4 barw* zainteresuje każdego. Autorowie przeprowadzają całkowicie dowód, iż wystarczy 5 farb dla pokolorowania dowolnej mapy na płaszczyźnie lub kuli w taki sposób, aby kraje, graniczące ze sobą, były odmiennych kolorów. Podstawę rozważań stanowi twierdzenie Eulera, którego dowód przytoczę poniżej dla zilustrowania talentu wykładowego Autorów.

Niech e oznacza ilość wierzchołków (punktów wspólnych co najmniej trzem krajom), f — ilość krajów, k — ilość granic krajów, przyczem za jedną granicę uważamy linję, której końcami są wierzchołki i która nie zawiera żadnego wierzchołka wewnątrz.

Twierdzenie Eulera brzmi:

$$e + f = k + 2.$$

Dalej przekładam dosłownie:

„Dla dowodu wyobraźmy sobie, że figura nie przedstawia mapy krajów, lecz układ pól uprawnych, poprzedzielanych groblami; zewnętrzny obszar znajduje się pod wodą; należy teraz obalać groblę za groblą w ten sposób, by kolejno zalać wszystkie pola. Nie potrzeba w tym celu zrywać *wszystkich* tam; zaniechamy wogóle otwierania grobli, którą już z obu stron omywa woda. Za każdym razem te tylko tamy należy zrywać, które z jednej tylko strony dotykają wody, z drugiej zaś nie, aby naprawdę otwierać dostęp do nowej działki pola. Jest rzeczą jasną, że należy zerwać w każdym razie f—1 tam, aby nawodnić wszystkie f—1 działek, tyle ich bowiem mamy poza obszarem zewnętrznym. Również jest jasne, że można w ten sposób postępować, jeśli choć jedna działka nie jest zalana wodą; nie dojdziemy do końca, póki nie zerwiemy wszystkich f—1 tam. Liczba więc zerwanych grobli wynosi dokładnie f—1. Bierzemy pod uwagę układ grobli nienaruszonych.

1. *Można, idąc niemi, dojść suchą nogą z każdego wierzchołka do każdego innego.* Albowiem w chwili początkowej, gdy woda otaczała wszystko tylko zewnątrz, możliwe to było z pewnością, w przeciwnym wypadku mielibyśmy dwa lub więcej nie łączących się układów pól, — niejako wyspy na morzu, — i należałoby tylko dla każdej z nich oddzielnie przerobić całe zadanie. Gdyby zaś w trakcie nawadniania, zerwanie którejś z grobli, np. AB, sprawiło, że pozostałe groble rozpadłyby się na dwa układy oddzielne, tak, że z wierzchołka położonego na jednym z nich, nie możnaby suchą nogą przejść do wierzchołka położonego na drugim, to prąd wody przepływałby między A i B, a zatem woda musiałaby omywać groblę AB przed jej otwarciem z obu stron. Umówiliśmy się jednak wyraźnie, że takich grobli zrywać nie należy.

2. *Jeślibyśmy wysłali z któregokolwiek wierzchołka posłańców, którzy mieliby, idąc groblami, odwiedzić wszystkie wierzchołki, to posłańcy tacy nie spotkaliby się nigdy w tym samym wierzchołku.* Gdyby bowiem prowadziły dwie *różne drogi* z P do Q groblami nienaruszonemi, to obie te drogi razem wzięte odcięłyby pewien obszar, któryby dookoła był zamknięty groblami niezerwanemi, nie mogłaby więc do niego woda przeniknąć.

Posłańcy, wychodzący ze stałego punktu, mogą zatem osiągnąć jakiś wskazany wierzchołek na *jednej* tylko ściśle oznaczonej drodze. *Przed przybyciem do któregoś wierzchołka* musi się przejść określony odcinek granicy, to znaczy, każdemu odcinkowi podporządkować można określony wierzchołek i jego koniec. Tyle jest przeto wierzchołków takich, ile nieuszkodzonych grobli. Doliczyć trzeba jeden wierzchołek: *punkt wyjścia*. Ilość tam nienaruszonych jest o jedność mniejsza od ilości wierzchołków, czyli wynosi $e-1$. Ogółem ilość tam zerwanych jest $f-1$, niezerwanych $e-1$, wszystkich razem $k=e-1+f-1$, a stąd wynika twierdzenie Eulera.

Twierdzenie Eulera stosowalne jest do wielościanów foremnych (w sensie topologicznym).

Z geometrji podają Autorowie między innemi: dowód Dandelina; teorję *krzywych o stałej szerokości* (t. j. krzywych, na których opisać można kwadrat o boku równoległym do dowolnego kierunku, przyczem każdy z boków ma z krzywą jeden tylko punkt wspólny); ciekawy dowód Hilberta, że zapomocą samego tylko linjału nie można znaleźć środka danego okręgu, że przeto w znanem twierdzeniu Steinera, według którego, mając koło i jego środek, można wykonać wszystkie konstrukcje geometrji elementarnej zapomocą samego tylko linjału, zadanie środka koła jest warunkiem istotnym.

Teorja mnogości reprezentowana jest przez jeden tylko § 7. Podaje on przeliczalność zbioru ułamków, nieprzeliczalność zbioru punktów odcinka, równą moc zbioru punktów odcinka i punktów kwadratów. Kończy uwagą o antynomjach teorji mnogości i ilustrującym je żartobliwym przykładem, nowym co do formy:

W pułku polecono żołnierzowi jednemu golić tych, którzy się sami nie golą. Czy ma on sam się golić? Jeśli to będzie czynił, wtedy należeć będzie do tych, którzy się sami golą, których zatem golić nie powinien. Jeśli się zaś nie ogoli, to będzie jednym z tych, którzy się sami nie golą, których zatem winien golić. Co winien uczynić żołnierz, aby ściśle spełnić polecenie?

Nie wszystkie tematy bogatej książki Rademechera i Toeplitza wspomniałem; wymienione zachęcą może Czytelników *Parametra* do sięgnięcia do źródła, a wtedy ocenią i prostotę wykładu, o której dają pewne już pojęcie przytoczone wyjątki, ocenią zdrowy i jasny pogląd na ścisłość matematycznego wykładu. Dokładność wywodów jest duża, przy unikaniu jednak momentów formalnych przy kwestjach, nie przedstawiających dla czytelnika wątpliwości; wielka jest jasność założeń, przejrzystość wniosków i owe estetyczne walory, odczuwane tak silnie przez każdego matematyka.

Bardzo pożyteczne i ciekawe są uwagi o greckiej matematyce: uczą podziwiać wielkość myśli starożytnych, jej samodzielność i głębię.

Czy trafią Rademacher i Toeplitz do szerszej publiczności, można wątpić; lektura ich dziełka wymaga wysiłku, dla nie matematyka niewszystko będzie łatwe. Może nawet niewszystko zrozumiałe. Nie będziemy się tu jednak bawili w wyszukiwanie dziur w całem, we wskazywanie ustępów, które są nieco gorsze, ani w analizę tego, czy w matematyce nie znajdą się inne kwestje, równie lub bardziej interesujące i dostępne. To, co dali Autorowie, jest próbą oryginalną, utrzymaną na wysokim poziomie i godną ze wszech miar poznania, szczególniej przez nauczycieli.

S. Kulczycki (Warszawa).

WŁADYSŁAW KRASIŃSKI (Warszawa).

Nauczanie indywidualne arytmetyki metodą Washburne'a.

W Ameryce ukazało się wielkie dzieło *„Individual Arithmetic"*, opracowane przez grono nauczycieli, pod redakcją C. Washburne'a. Dzieło to składa się z 18 tomików, bardzo starannie wydanych.

= WASHBURNE | INDIVIDUAL ARITHMETIC | Book One | by Carleton Washburne | Superintendent of Schools | Emma Jaycox Koepke, Clauda Rogers Mc Afee, & Frieda Barnett | Teachers in the Public Schools | Winnetka, Illinois | With the coöperation and assistance | of the teachers and research depart - | ment in the Winnetka Public Schools | World Book Company | Yonkers-on-Hudson, New-York | and Chicago, Illinois |

For. $20 \times 13^1/_2$. Str. IV + 106.

= *Idem.* Book Two . . . . Str. IV + 108.
= *Idem.* Book Three . . . . Str. III + 92.
= *Idem.* Book Four . . . . Str. IV + 103.
= *Idem.* Book Five . . . . Str. IV + 108.
= *Idem.* Book Six . . . . Str. VI + 122.
= *Idem.* Book Seven . . . . Str. IV + 108.
= *Idem.* Book Eight . . . . Str. IV + 140.
= *Idem.* Book Nine . . . . Str. III + 100.
= *Idem.* Book Ten . . . . Str. IV + 120.
= *Idem.* Book Eleven . . . . Str. IV + 140.
= *Idem.* Book Twelve . . . . Str. IV + 136.
= *Idem.* Test Book: Books One to Five. (Str. II + 66.)
= *Idem.* Test Book: Books Six to Twelve. (Str. IV + 82.)
= *Idem.* Key for Test Book: Books One to Twelve. (Str. VII + 82).
= *Idem.* Teacher's Manual: Books One to Twelve. (Str. II + 107).

Zanim przejdziemy do omówienia przedmiotu, podamy nieco danych historycznych, zaczerpniętych z podręcznika dla nauczyciela (*Teacher's Manual*).

Metoda została opracowana w miejscowości Winnetka (stan Illinois). Szkoły powszechne (*Public Schools*) w Winnetce zorganizowano w r. 1919 na zasadzie laboratoryjnej i jednocześnie rozpoczęto badania skuteczności sposobu nauczania. Do szkół tych uczęszczają dzieci różnych klas społecznych i różnych uzdolnień, wobec czego była możność wypróbowania materjału nauczania i stwierdzenia jego stron dodatnich i ujemnych.

Początki metody zawdzięczać należy doświadczeniom, prowadzonym w tym kierunku przez pp. M. Ward i F. Burk w Seminarjum Nauczycielskiem w San Francisco. Badania tamtejsze były bodźcem do opracowania omawianej metody.

Serja podręczników, o których będzie mowa, jest wynikiem wysiłku 60 nauczycielek szkół w Winnetce w ciągu zgórą 10 lat. Początki były proste i niewymyślne: układano ćwiczenia i testy, odbijano je na mimeografie i używano w formie arkuszy lub zeszytów, zanim nadano im formę książki.

Pierwsze książki miały charakter próbny. Uczniowie, uczący się według nich, byli poddawani próbom testowym, — nauczyciele zaś wypełniali szereg kwestjonarjuszy. Wszystko to razem było podstawą do rewizji podręczników, zmiany materjału, przestawień i t. p. Ostateczny wynik może być uznany za doskonały w tym stopniu, w jakim może być o tem mowa przy dzisiejszym stanie nauki o nauczaniu.

Nauczanie zatem w Winnetce oparte jest na samodzielnej pracy ucznia, posługującego się odpowiednim dla niego podręcznikiem. Ingerencja nauczyciela sprowadzona jest do minimum — sprawdzania wyników pracy ucznia oraz udzielania niezbędnych krótkich wyjaśnień.

Całość przedstawia się, jak następuje. Dwanaście podręczników, przeznaczonych dla ucznia:

Pierwsza książka (*Book One*) — dla stopni 1 i 2: Dodawanie i odejmowanie w zakresie 20.

Druga książka (*Book Two*) — dla stopni 2 i 3: Dodawanie „kolumnowe". Numeracja ustna i pisemna do 9 999. Dolary i centy.

Trzecia książka (*Book Three*) — dla stopnia 3: Algorytm odejmowania. Cyfry rzymskie. Mierzenie długości odcinków.

Czwarta książka (*Book Four*) — dla stopnia 3: Tabliczka mnożenia. Mnożenie przez mnożnik jednocyfrowy.

Piąta książka (*Book Five*) — dla stopnia 3 lub 4: Tabliczka dzielenia. Dzielenie przez dzielnik jednocyfrowy. Odejmowanie liczb wielocyfrowych (powyżej 9 999).

Serję pięciu książek zamykają: Książka Testów (*Test Book*), dotycząca materjału, zawartego w wymienionej serji, oraz Książka Korekt (*Correction Book*). Rola tych książek pomocniczych będzie omówiona niżej.

Szósta książka (*Book Six*) — dla stopnia 4: Numeracja ustna i pisemna (w cyfrach arabskich i rzymskich). Mnożenie przez liczbę wielocyfrową (do czterocyfrowej). Jednostki miary płynów. Rachuba czasu.

Siódma książka (*Book Seven*) — dla stopni 4 lub 5: Dzielenie przez dzielnik wielocyfrowy (do czterocyfrowego).

Ósma książka (*Book Eight*) — dla stopnia 4 lub 5: Wprowadzenie ułamków.

Dziewiąta książka (*Book Nine*) — dla stopnia 5: Dodawanie ułamków o łatwych mianownikach.

Dziesiąta książka (*Book Ten*) — dla stopnia 5: Odejmowanie, mnożenie i dzielenie ułamków. Łatwe diagramy.

Jedenasta książka (*Book Eleven*) — dla stopnia 5 lub 6: Wprowadzenie ułamków dziesiętnych. Cztery działania na ułamkach dziesiętnych.

Dwunasta książka (*Book Twelve*) — dla stopnia 6: Procenty.

Serję książek od szóstej do dwunastej zamykają: Książka Testów i Książka Korekt, podobnie jak dla niższej serji.

Nauczyciel posiada: Podręcznik dla nauczyciela (*Teacher's Manual*), w którym omówiony jest cały sposób nauczania, — i Klucz do Książki Testów (*Key for Test Book*).

Z powyższego widać, że wymienione podręczniki dotyczą raczej poszczególnych tematów z zakresu arytmetyki, a nie — jak u nas — wyczerpują program odnośnego stopnia nauczania. Taki sposób zapewnia większą giętkość użycia podręcznika, umożliwiając między innemi zestawienie tematów, gdyby nauczający uznał to za potrzebne.

Książki nabywa każdy uczeń, książki testów i korekt dostarcza szkoła po jednym egzemplarzu na kilkoro dzieci.

Przejdźmy teraz do sposobu użycia wymienionych książek. Autor zapewnia, że chociaż one nadają się do nauczania zbiorowego i metody projektów, to jednak największą ich zaletą jest to, że się nadają do nauczania indywidualnego, które zapewnia uczniowi największe korzyści.

Każdy podręcznik ucznia jest skonstruowany w sposób następujący. Całość materjału jest podzielona na pewne, logicznie wyodrębniające się części — szczeble (*steps*). W zakresie każdego szczebla mamy działy A, B, C, — czasami D. Ćwiczenia w każdym dziale są bardzo podobne.

Uczeń musi przerobić wszystkie ćwiczenia działu A, sprawdzić wyniki według podanych w podręczniku odpowiedzi*) i o ile wykonał pracę z dokładnością 100%, może nie przerabiać działów B, C..., i przejść do następnego szczebla. Jeden choćby błąd zmusza go do przerabiania dalszych działów B, C..., póki nie osiągnie zupełnej dokładności wyników. Dzieci młodszych stopni, a zwłaszcza stopnia pierwszego, są kontrolowane ściślej przy sprawdzaniu wyników pracy, gdyż nie umieją jeszcze posługiwać się należycie podręcznikiem.

Po przerobieniu pomyślnem kilku szczebli wzoru uczeń przerabia *sua sponte* test wstępny (*practice test*), podany w odnośnem miejscu jego podręcznika. Test ten ma na celu przekonać ucznia, czy dostatecznie opanował materjał i czy może się poddać testowi właściwemu (*real test*), który mu da nauczyciel. W teście wstępnym uczeń znajduje wszystko, o czem była mowa, — aż do punktu, w którym się znalazł: przykłady podobne, zadania podobne, — zwraca się tylko uwagę na to, aby w teście znalazły się najtrudniejsze elementy materjału opracowanego. Uczeń sam poprawia test.

W odpowiedziach, dotyczących testu, uczeń znajduje odsyłacze do Książki Korekt, a więc np.: w książce 4, na str. 14, mamy test wstępny, dotyczący odejmowania (36 przykładów), np.

$$\begin{array}{r} 46 \\ -\ 28 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 73 \\ -\ 21 \\ \hline \end{array}$$

Na dole stronicy odsyłacz: „Odpowiedzi na str. 16 i 17".

Na str. 17 znajdują się odpowiedzi.

18, 52, i t. d.
(35) (31)

Przypuśćmy, że uczeń obliczył:

$$\begin{array}{r} 46 \\ -\ 28 \\ \hline 17 \end{array}$$

Tłustym drukiem podano odpowiedź 18, skąd uczeń widzi, że się pomylił, dając odpowiedź 17. Małe cyferki w nawiasie pod każdą odpowiedzią odsyłają ucznia do odnośnej stronicy książki korekt. Nasz uczeń zatem poprosi nauczyciela o książkę korekt, otworzy ją na str. 35 i znajdzie tam szereg ćwiczeń, gdzie przypadek krytyczny (odjąć 8 od 16) zdarza się najwięcej. W ten sposób słaby punkt zostanie podparty. (Odsyłacze takie spotykamy dopiero od książki drugiej). Mogło się wprawdzie zdarzyć, że mylna odpowiedź była tylko zwykłem *lapsus calami*, — niemniej jednak Autor uważa, że i w tym przypadku dodatkowe przerobienie pewnej serji ćwiczeń nie jest bez widocznego pożytku dla ucznia.

*) Odpowiedzi są podawane na końcu każdego szczebla. Uczeń znajduje u dołu stronicy wskazówkę, gdzie ma szukać odpowiedzi.

Uporawszy się pomyślnie z książką korekt, uczeń powraca do testu, ale innego wzoru, choć dotyczącego tego samego materjału. Zwykle mamy trzy wzory testu wstępnego.

W przypadkach mniej pomyślnych uczeń musi znowu powrócić do książki korekt i przerobić test wzoru trzeciego, a jeżeli i tu się pomyli, — znowu wróci do pierwszego, choć, — jak twierdzi Autor, — okoliczność ta zachodzi bardzo rzadko.

W każdym razie uczeń musi wykonać pracę bezbłędnie, aby mógł pójść dalej.

Po pomyślnem przejściu przez test wstępny uczeń zgłasza się do nauczyciela, który mu daje „test właściwy" (*real test*), zaczerpnięty z osobnej książki testów, będącej w posiadaniu nauczyciela w kilku egzemplarzach. (Praktyka uczy, że nigdy nie zgłasza się więcej ponad sześciu uczniów jednocześnie). Ten test sprawdza nauczyciel według klucza. Perypetje z tym testem są te same, co wyżej, — więc nie wymagają wyjaśnienia.

Jeżeli ten test wypadł pomyślnie, nauczyciel upoważnia ucznia do pójścia dalej.

Kładzie się szczególny nacisk na biegłość w rachunku w zakresie czterech działań na liczbach całkowitych; Autor uważa, że biegłość w działaniach na ułamkach i w rachunku procentowym nie narzucają się tak natarczywie.

Drogą eksperymentów ustalono, że w trzyminutowej jednostce czasu uczniowie winni wykonać przykładów:

Działami	Stopień (rok nauczania)				
	2	3	4	5	6
Dodawanie jednocyfrowych	45—60	65	82	100	123
Odejmowanie jednocyfrowych	45	45	72	92	108
Dodawanie kolumnowe		3	5	5	8
Odejmowanie z t. zw. „pożyczaniem"		6	10	12	15—22
Mnożenie z tabliczki		45	57	71	84
Dzielenie z tabliczki			50	57	—
Mnożenie wielocyfrowych			5	6	8
Dzielenie wielocyfrowych				2	3

Wymienione normy obowiązują każde dziecko (z wyjątkiem nienormalnych) przy 100%-owej dokładności wyników.

Są to ponoć wymagania dość pobłażliwe, — wynik bowiem przeciętny klasy jest lepszy. Do uzyskania sprawności rachunkowej daje się specjalne ćwiczenia z ograniczaniem w czasie. Uczniowie sami ćwiczą się w zdobywaniu biegłości rachunkowej, używając do kontroli trzyminutowych zegarów piaskowych.

Należy jeszcze zaznaczyć, że stosowane są rownież testy, kontrolujące biegłość rachunkową. W tych przypadkach uczeń, — o ile nie zdążył wykończyć testu na czas, — musi po upływie 3 minut wziąć ostatni wynik w kółko, ale test doprowadzić do końca, — chodzi bowiem o to, żeby miał do czynienia ze wszystkiemi elementami rachunku, podanemi w teście.

I tu również jest stopniowanie: zpoczątku uczniowie pracują w tempie wolniejszem, zanim nie osiągną przepisanego tempa.

Stosowane są również testy, mające na celu przegląd dłuższych partyj materjału.

W każdym podręczniku dla ucznia po szeregu t. zw. przykładów znajdujemy szereg zadań z tekstem słownym. (Spotykamy je również i w testach).

Dobór zadań tekstowych jest również wynikiem dłuższych badań i eksperymentów. Badania te wykazały — według Autora — między niemi co następuje:

1) Obojętną jest rzeczą, czy dane działanie wprowadzamy za pośrednictwem zadania z fabułą, czy formalnie, — byleby owo działanie znalazło zastosowanie do rozwiązania różnych zagadnień praktycznych z życia dziecka, gdzie chodzi o cechy ilościowe.

2) T. zw. analiza nie daje uczniom tej pomocy przy rozwiązywaniu zadań, jakiej po niej spodziewano; lepszą pomoc w tym względzie okazuje rozwiązywanie prostych zadań, zaczerpniętych ze świata zainteresowań dziecka.

3) Zadania wprowadzają dodatkową trudność, jeżeli ich fabuła dotyczy stosunków obcych dzieciom.

Zgodnie z temi spostrzeżeniami przyjęto jako kryterja przy układaniu zadań tekstowych:

1. Język musi być odpowiedni zarówno w doborze wyrazów, jak i w budowie zdań.

2. Fabuła zadań musi dotyczyć spraw dziecka i omawiać takie sytuacje, w których dziecko może łatwo siebie wyobrazić, jako osobę działającą. Takie zadania — zdaniem Autora — mają większą wartość kształcącą, są bardziej związane z przeżyciami dziecka. W zadaniach tych dzieci popełniają mniej t. zw. „głupich błędów" (*stupid errors*), niż w zadaniach, omawiających sytuacje dzieciom obce.

3. Zadanie winno zawierać bodziec, zachęcający do rozwiązania: dziecko musi odczuwać, że gdyby się znalazło w omawianej w zadaniu sytuacji, musiałoby właśnie zastosować te czy inne wiadomości z arytmetyki.

Niezależnie od zadań tekstowych, podanych w podręcznikach, stosowane są zadania, wyrastające na tle wysuwanych przez dzieci czy przez nauczyciela projektów. Tu Autor ostrzega przed nadmierną „arytmetyzacją", uważając słusznie, że te tylko sprawy rozważanego projektu będą poddane kontroli liczby, które się tego w sposób naturalny domagają. Nie należy psuć pracy twórczej dziecka przez niewczesne wplatanie do niej elementu rachunkowego: okazja do rachunku prawdopodobnie nadarzy się sama w trakcie realizacji samego projektu — i to w tych momentach, gdzie rachunek okaże się koniecznym. — Zupełnie jak z dorosłymi, którzy stosują swą wiedzę arytmetyczną w pewnych okolicznościach życiowych, ale wszakże nie stwarzają ich tylko w celu zastosowania rachunków. Nikt nie mierzy objętości pokoju, ani nie idzie do sklepu w tym jednym celu, aby zyskać okazję do ćwiczeń rachunkowych.

Treść zadań jest znowu prosta. Brak zupełnie zadań złożonych. Omawia się stosunki domowe, szkolne, w starszych oddziałach — pracę zarobkową uczniów.

Treść następujących po sobie zadań — różna. W jednym tylko podręczniku znalazłem szereg zadań, dotyczących tej samej sprawy, — mianowicie wyprawy skautów na wycieczkę.

Należy tu zaznaczyć, że przy operacjach na liczbach wielocyfrowych Autor rezygnuje z zadań tekstowych, wychodząc z założenia, że w naturalnem środowisku dziecka nie zachodzi konieczność operowania dużemi liczbami.

Zadania tekstowe figurują w testach różnego rodzaju. Sposób ich sprawdzania jest taki, jak i innych ćwiczeń rachunkowych.

Dla całkowitego zobrazowania tej *„Arytmetyki Indywidualnej"* należy powiedzieć jeszcze parę słów o sposobach użycia podręczników. Każdy podręcznik rozpoczyna się od przedmowy, w której uczeń znajduje pouczenia, jak się ma uczyć (młodszym uczniom wyjaśnień udziela nauczyciel), — albo raczej, jak przy samodzielnej pracy ma korzystać z podręcznika.

Całość jest tak pomyślana, aby sprowadzić do minimum cały balast pisaniny, a na czoło wysunąć ćwiczenia w rachunkach. W tym celu uczniowie nie przepisują nic do zeszytów, jak to się u nas praktykuje, ale wprost na kartkach przystępują do arytmetyki w stanie — że tak powiem — czystym.

Weźmy dla przykładu przedmowę do k s i ą ż k i p i e r w s z e j:

„Korzystając z tej książki nie masz potrzeby przepisywania liczb. Trzymaj swą kartkę pod wierszem z liczbami i pisz na niej tylko odpowiedzi.

„Musisz nauczyć się zwijać kartkę ładnie i pisać odpowiedzi czysto. Najlepiej jest pozaginać kartkę przed rozpoczęciem stronicy, podwijając górny brzeg na szerokość około cala, następnie tworząc drugą fałdę, — nauczycielka pokaże ci, jak to robić. Rób zagięcia *równo*. Następnie rozwiń kartkę i zaczynaj pracę.

„Możesz teraz łatwo i równo podwijać według zrobionych fałd.

„W pierwszym wierszu na każdej stronicy są podane odpowiedzi. Zakryj je swą kartką. Napisz na niej odpowiedzi, następnie przesuń kartkę wdół, abyś zobaczył odpowiedzi w książce.

„Sprawdź, czy każda twoja odpowiedź jest dobra. Jeżeli któraś z nich jest mylna, oznacz ją $\times$ na kartce. Popraw ją uważnie, zanim zaczniesz wiersz drugi.

„Podwiń wiersz twych odpowiedzi. Trzymaj kartkę pod drugim wierszem z liczbami. Wypisz odpowiedzi. Następnie odwróć stronicę z odpowiedziami i trzymaj wiersz swych odpowiedzi pod drugim wierszem. Jeśli któraś z twych odpowiedzi jest mylna, oznacz ją $\times$ i wpisz odpowiedź właściwą. Wróć do poprzedniej stronicy i zobacz, gdzieś się pomylił. Sprawdź uważnie, aż będziesz pewien, jak być powinno.

„Przejdź do następnego wiersza. Rób tak całą stronicę. W ten sposób przerabiaj następną stronicę. Pracuj dalej!"

Dziecko stopnia 1, korzystając z P i e r w s z e j K s i ą ż k i, ćwiczy się w dodawaniu (*Addition facts*). Na str. 9 znajduje w sześciu symetrycznych wierszach 48 „przykładów" typu:

$$\begin{array}{cccccccc} 3 & 6 & 6 & 8 & 9 & 7 & 6 & 3 \\ +9 & +6 & +2 & +0 & +0 & +2 & +0 & +7 \\ \hline \end{array}$$

Pierwszy wiersz podany jest z sumami, dalsze — bez nich. Uczeń jest pouczony, żeby przyłożył swoją kartkę do pierwszego wiersza w ten sposób, aby zakrywała sumy, i wypisał te sumy pod odnośnemi przykładami, a później porównał je z podanemi w podręcznikach wynikami i ewentualne błędy poprawił.

Uporawszy się z pierwszym wierszem, uczeń ma podwinąć napisany już wiersz odpowiedzi, przyłożyć nową krawędź pod drugi wiersz i wpisać sumy.

Po ukończeniu drugiego wiersza uczeń musi znowu go podwinąć, podłożyć pod trzeci wiersz, — i tak aż do końca.

W ten sposób po ukończeniu całej stronicy uczeń ma swą kartkę z symetrycznie wypisanemi na niej 48 liczbami. Chcąc sprawdzić wyniki swej pracy, uczeń musi je porównać z odpowiedziami; na str. 9, którą przerabiał, znajduje u dołu uwagę: odpowiedzi patrz na str. 10. Jakoż na str. 10 uczeń znajduje wyniki, wydrukowane w ten sposób, że podstawiając pod odnośny wiersz swoje wyniki, ma możność szybkiego porównania i stwierdzenia ewentualnych błędów.

W związku z takiem postępowaniem powstaje u małych nowa trudność techniczna: zwijanie papieru (*paper folding*); chodzi bowiem o to, żeby przy podwijaniu nie mieć nigdy więcej nad dwie grubości kartki. Małe dzieci muszą zpoczątku ćwiczyć się w tym zakresie; starsze zdobywają tu nawet dużą technikę i umieją zawczasu ładnie przygotować sobie kartkę.

Jak widzimy, jest to istotnie pewien system, wypracowany — to prawda — długo i mozolnie, ale doprowadzony do stanu, który zabezpiecza możność takiego nauczania rachunków, o jakiem mówimy.

Wiele spraw zmechanizowano. Aparat, stworzony w Winnetce, pozwala uczniowi systematycznie pracować, — i to w tempie jemu właściwem, — daje mu możność łatwego wykrywania swych błędów, uczy polegania na sobie, a nauczycielowi ułatwia pracę kontrolującą.

Ponieważ w tym sposobie nauczania dziecko pracuje samodzielnie pod kontrolą podręcznika (z wyjątkiem testów właściwych, kiedy kontroluje nauczyciel, — również zresztą mechanicznie przy pomocy klucza), trzeba, aby ten podręcznik był bez błędu.

Istotnie, — tę cnotę posiada. Przeczytałem uważnie dwanaście tomów i na całej tej przestrzeni znalazłem zaledwie parę drobnych usterek — i to typograficznych.

Papier wspaniały, druk — śliczny, czytelny, rysunki — staranne i ładne.

Przejdźmy do omówienia ważniejszych rysów charakterystycznych dla omawianych podręczników. K s i ą ż k a P i e r w s z a (*Book One*) dotyczy ***dodawania i odejmowania w zakresie 20***. Zaraz na pierwszej stronicy tekstu uderza nas osobliwość: podano zapisy w postaci algorytmu pisemnego, np.

$$\begin{array}{cccccccc} 2 & 4 & 1 & 5 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ +2 & +1 & +5 & +5 & +0 & +4 & +1 & +4 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 10 & 0 & 5 & 3 & 8 \end{array}$$

Upoważnia to nas do przypuszczenia, że chodzi o możliwie rychłe przejście do dodawania algorytmowego (u nas dopiero w IV roku nauczania).

Druga osobliwość — to tytuł: *„Addition facts"*, a nie *„Addition results"*, ani poprostu *„Addition"*. Sam tytuł suggeruje nam, że tu chodzi o stwierdzenia pewnych faktów, związanych z takiemi właśnie zestawieniami składników, jakie podano wyżej.

W podręczniku dla nauczyciela (*Teacher's Manual*) wyjaśnia Autor, że dziecko już w przedszkolu winno być oswojone z pojęciem liczby i umieć pisać i czytać liczby do 20, zanim dostanie podręcznik. Tu istotnie chodzi o stwierdzenie i spamiętanie pewnych faktów.

Na tej samej stronicy znajdujemy pięć dalszych wierszy, które się różnią od podanego tylko porządkiem. Uczeń musi nauczyć się odczytywać rezultaty bezpośrednio bez liczenia (*without counting*). Jeżeli uczeń ma jakieś wątpliwości, wolno mu zobaczyć odpowiedź w pierwszym wierszu lub opuścić ją: brakującą pozycję wypisze z odpowiedzi, podkreślając ją, — nie powinien jednak starać się wyliczać" (*He* **never** *is to count or try to „figure it out"*. — Podkreślenie Autora).

W miarę posuwania się dalej spotykamy inne kombinacje składników i nawroty do dawnych, aby całą sprawę zmechanizować, sprowadzić do znanych faktów, o których się wie *bez liczenia.* Widać stąd, że Autorowi chodzi wyłącznie o zmechanizowanie rachunku. W ten sposób, — zachowując gradację trudności, — podano 100 „przykładów" na dodawanie. Dotąd dziecko poznawało te sprawy, jako fakty odosobnione. Na zakończenie podano tabelę dodawania już w postaci uporządkowanej, tworząc z elementów 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 kombinacje po dwa, jak oto:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\
\underline{+\,0} & \underline{+\,1} & \underline{+\,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{+\,9} \\
1 & 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\
\underline{+\,0} & \underline{+\,1} & \underline{+\,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{+\,9} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\
9 & 9 & 9 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 9 \\
\underline{+\,0} & \underline{+\,1} & \underline{+\,2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{+\,9}
\end{array}$$

Po takiem postanowieniu sprawy nie dziwimy się, że w przykładach spotykamy dodawanie zera, bo chodzi tu o stwierdzenie pewnego faktu natury raczej wzrokowej. Wątpić należy, czy w symbolu 0 dziecko dopatrzy się symbolu liczby.

W podręczniku jest wprawdzie wzmianka, że nauczycielka winna udzielać dzieciom wskazówek, zarówno wstępnych, jak i w czasie wykonywania pracy, — byleby wskazówki te nie były zbyt sztuczne i dawały tyle tylko, aby dziecko mogło wykonać pracę według podręcznika. Nie znalazłem nigdzie jakiejś uwagi o własnościach działania.

Dodawanie zakończono wzmianką, dotyczącą różnej terminologji odnośnie do tego działania i wprowadzono zapis w wierszu (*Addition in all forms*). Zrobiono to tak:

„Dotąd, kiedyś dodawał dwie liczby, były one zapisane w ten sposób $\begin{array}{r}4\\ \underline{+\;3}\end{array}$. Są inne sposoby zapisu tej samej rzeczy: „4 + 3" znaczy 7. „4 plus 3" znaczy to samo. To samo znaczy „4 i 3". Kiedy mówimy: „Dodaj 4 i 3" lub „Znajdź sumę 4 i 3", — mamy na myśli to samo, co $\begin{array}{r}4\\ \underline{+\;3}\end{array}$. Każda odpowiedź jest 7".

Po czem następują 24 przykłady na dodawanie w różnej terminologji i różnym zapisie.

Odejmowanie wprowadza się jako działanie odwrotne względem dodawania w ten sposób:

Zaczyna się od zagadnienia: „I ile?" — na przykładzie z pustem miejscem $\boxed{\begin{array}{r}4\\ \underline{+\quad}\\ 8\end{array}}$ —„ 4 *i ile* jest 8?"

Odpowiedź: 4 i 4 jest 8, po czem następuje 100 przykładów.

Objaśnienie odejmowania jest następujące:

„Wiesz, że $\boxed{\begin{array}{r}6\\ \underline{+\quad}\\ 11\end{array}}$ znaczy „6 i ile jest 11?"

Odpowiedź: „i 5".

Jest inny sposób zapisu tej samej rzeczy: $\boxed{\begin{array}{r}11\\ \underline{-\;6}\\ 5\end{array}}$

Mała kreska — znaczy „*I ile?*"

Czytaj: $\boxed{\begin{array}{r}11\\ \underline{-\;6}\end{array}}$ „6 *i ile* jest 11?"

Oto inny przykład: $\boxed{\begin{array}{r}12\\ \underline{-\;4}\end{array}}$

To znaczy: „4 *i ile* jest 12?" Odpowiedź: „i 8". — To wszystko. Mało, ale wymownie! Po czem natychmiast następują przykłady na odejmowanie liczb jednocyfrowych.

Sposób przeprowadzenia jest analogiczny z omówionem wyżej dodawaniem, z podaniem tabeli odejmowania i różnego wysłowienia, o czem niema potrzeby pisać.

Książka kończy się rekapitulacją obu działań. Przykłady przeplatane są zadaniami tekstowemi o niewymyślnej, ale miłej fabule.

Zająłem tu dłużej uwagę Czytelnika z myślą o tem, aby lepiej przedstawić sposób traktowania przedmiotu w ujęciu podręcznikowem; w dalszym ciągu będę omawiał te tylko sprawy, które wyróżniają się jakimś rysem charakterystycznym.

Wróćmy do sprawy zapisu działań w kolumnę.

Zrobiło to na mnie wrażenie, że Autorowi chodzi o możliwie rychłe przejście do rachunku algorytmowego. Jakoż w K s i ą ż c e D r u g i e j czytamy na str. 1:

Aby dodać $\begin{array}{r}16\\ \underline{+\;2}\end{array}$ zaczynaj od prawej i dodaj dolną liczbę, do liczby nad nią: $\begin{array}{r}6\\ \underline{2}\\ 8\end{array}$ i $\begin{array}{r}16\\ \underline{2}\\ 18\end{array}$

Tylko tyle! Następują ćwiczenia. Mam wrażenie, że poza tem chyba dopowie coś nauczycielka.

Szczebel 2 w Książce Pierwszej obejmuje przypadki przekroczenia progu dziesiątkowgeo. Wyjaśnienie:

Przypuśćmy, że chcesz dodać $\begin{array}{r}14\\ \underline{+\ 9}\end{array}$. Najpierw mówisz „4 i 9 jest 13".

Piszesz 3 — część 13 — pod 9, jak oto: $\boxed{\begin{array}{c}14\\ \underline{9}\\ 3\end{array}}$

Następnie dodajesz 1 — część 13 — do 1 — części 14: 1 i 1 jest 2.

Piszesz 2 przed 3, jak oto: $\boxed{\begin{array}{c}14\\ \underline{9}\\ 23\end{array}}$

Więc: 14 i 9 jest 23.

Następuje rozwiązanie analogiczne przykładu $\begin{array}{r}18\\ \underline{7}\end{array}$ i na tem koniec.

Jest to wyjaśnienie algorytmu dodawania podane w postaci trywialnej. Zwraca się tu uwagę tylko na stronę zewnętrzną — i to w redakcji, która może nastręczyć małemu czytelnikowi pewne wątpliwości. (Mam na myśli owe „części" 13 lub 14. W redakcji angielskiej brzmi to nieco zgrabniej, — niemniej jednak można mieć wątpliwości co do charakteru owych „części".)

W układzie metodycznym niema nic nowego. Osobliwością natomiast jest wprowadzenie *już tutaj* pisania i czytania liczb do 9 999. (Str. 98 i dalsze). Sprawę tą załatwia się niefrasobliwie metodą Bell-Lancastra: jedno dziecko czyta z podręcznika liczby, a drugie je kontroluje według odpowiedzi ze swego podręcznika. Pisać liczby dziecko może się nauczyć samo. Zdobywszy tę umiejętność, dziecko rozszerza zakres swych możliwości odnośnie do dodawania.

Wprowadzeniem dolara i centa kończy się ta książka.

Trzecia Książka dotyczy *algorytmu odejmowania*. Wyjaśnienie algorytmu analogiczne do podanego wyżej dla dodawania.

Przyjęto tam t. zw. „austrjacki" sposób — przez dopełnianie. Autor zapewnia, iż aczkolwiek dotąd nie zostało naukowo ustalone, czy ten sposób ma wyższość nad innemi, to jednak w praktyce jest dla dzieci łatwiejszy i daje dobre rezultaty w nauczaniu.

Układ materjału został przeprowadzony ze znaczną drobiazgowością; rozróżnia się np. — jako osobne przypadki — takie przykłady:

$$\begin{array}{r}2578\\ \underline{-\ 1936}\\ 642\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{r}2578\\ \underline{-\ 2484}\\ 94\end{array}$$

Różnią się one tylko tem, że różnica jest trzycyfrowa albo dwucyfrowa. Nic to nie zawadza, jeżeli chodzi o ćwiczenia, ale niema potrzeby robić z tego osobnych szczebli.

Fabuła zadań urozmaicona: mamy tam odejmowanie, dopełnianie i porównanie różnicowe.

Końcowe działy dotyczą cyfr rzymskich do XII oraz mierzenia długości w calach i stopach. Ta ostatnia sprawa obowiązuje tylko te dzieci, które nie miały robót ręcznych. Dla nauczyciela jest to dział dość kłopotliwy, bo nauczyciel musi sam sprawdzać wyniki pomiarów. Drobnych podziałek cala nie uwzględnia się: są tylko połówki cala.

Czwarta książka obejmuje tabliczkę mnożenia (*Multiplication facts*) oraz algorytm mnożenia czterocyfrowej przez jednocyfrową. I tu również rozpoczyna się od stwierdzenia faktów w zakresie mnożenia.

Na pierwszej stronicy tekstu znajdujemy:

$$\begin{array}{r}0\\ \underline{\times\ 0}\\ 0\end{array}\quad\begin{array}{r}3\\ \underline{\times\ 1}\\ 3\end{array}\quad\begin{array}{r}9\\ \underline{\times\ 1}\\ 9\end{array}\quad\begin{array}{r}6\\ \underline{\times\ 1}\\ 6\end{array}\quad\begin{array}{r}2\\ \underline{\times\ 8}\\ 16\end{array}\quad\begin{array}{r}1\\ \underline{\times\ 9}\\ 9\end{array}\quad\begin{array}{r}1\\ \underline{\times\ 6}\\ 6\end{array}\quad\begin{array}{r}4\\ \underline{\times\ 1}\\ 4\end{array}$$

Następne pięć wierszy tej stronicy to permutacja wiersza pierwszego bez odpowiedzi.

Stwierdziwszy fakty w wierszu pierwszym, uczeń winien powypisywać iloczyny w następnych wierszach. Widzimy tu coś zupełnie odbiegającego od naszej praktyki. Zaczyna się tu od przypadków osobliwych: mnożenia przez zero i przez jedność, — no, ale przecież chodzi o stwierdzenie faktu, — można więc go stwierdzić i reprodukować przy pierwszej nadarzającej się sposobności.

Następne stronice wprowadzają nowe połączenia i nawracają do starych — tak, że uczeń ma wielokrotnie do czynienia z tą samą kombinacją czynników. W ten sposób podano całe 100 połączeń tabliczki mnożenia.

Proces ten, — jak zwykle, — zamyka się uporządkowaniem wszystkich połączeń i podaniem różnego wysłowienia mnożenia i zapisu w wierszu. Całość obejmuje prawie 50% książki (łącznie z testami i zadaniami tekstowemi).

Algorytm wprowadza się ostrożnie, zaczynając od mnożenia dwucyfrowej przez jednocyfrową. Wyjaśnianie algorytmu w przypadku przekroczenia progów jest analogiczne do omawianych wyżej przypadków w dodawaniu i odejmowaniu.

Należy tu jeszcze wspomnieć o pewnym momencie przygotowawczym do mnożenia z przekroczeniami progów, gdyż chodzi o spamiętanie remanentów. Potrzebną wprawę uzyskuje uczeń, przerabiając następujące ćwiczenia:

Dodaj 5 do	7 × 7		Dodaj 7 do	1 × 5	
" " "	9 × 1		" " "	9 × 5	
" " "	. . .		" " "	. . .	

U nas nie robi się z tego osobnej sprawy.

Książka Piąta dotyczy *dzielenia*. Sprawa przeprowadzona analogicznie do odejmowania. Odwraca się mnożenie i to jednostronnie; zawsze poszukuje się mnożnej. Rozpoczyna się od zagadnienia: „4 razy po ile?", jak oto:

$$\begin{array}{r}?\\ \underline{\times\ 4}\\ 24\end{array}$$

Następują rzeczy już znane z poprzedniego opisu, a więc — tabliczka dzielenia (*Division facts*), jej zestawienie i podanie różnych sposobów zapisu i różne wysłowienia. Na str. 38 czytamy: „Jest kilka sposobów zapisu dzielenia, np. 9)63, 9 × ? = 63, 63 ÷ 9, 63 podzielone na 9 równych części, 63 podzielone przez 9, $^1/_9$ z 63 (w oryginale: $^1/_9$ *of* 63 *is* —). Wszystko to oznacza to samo. Każda odpowiedź jest 7.

Poza tem mamy algorytm dzielenia przez dzielnik jednocyfrowy, przeprowadzony z tą samą drobiazgowością, co i poprzednie działania. Tom kończy się *odejmowaniem* liczb sześciocyfrowych.

Książki Szósta i Siódma obejmują *algorytmy mnożenia i dzielenia.* Sposób traktowania sprawy już znany, — więc nie będę ich omawiał.

Książka Ósma. Stanowi ona przełom w nauczaniu dlatego, że wprowadza się tu *ułamki*, a raczej — że wprowadza się je z większą ostrożnością, niż to miało miejsce z innemi pojęciami, dotąd rozważanemi.

Ciekawy jest wstęp do tej książki, podany w podręczniku dla nauczyciela, — wstęp, który jest jednocześnie historją książki.

Rzecz miała się tak. Kiedy zaczęto doświadczalnie badać, w którym roku nauczania należy wprowadzić dodawanie, odejmowanie i mnożenie ułamków, stwierdzono nieoczekiwanie, że uczniowie starszych stopni (łącznie z szóstym) wykazali zdumiewające nieuctwo (*an amazing ignorance*), jakkolwiek byli to uczniowie, którzy już „przeszli" cały przepisany kurs ułamków.

Niepomyślne wyniki testów przypisano tej okoliczności, że uczniowie nie wiedzieli dobrze, co to jest wogóle ułamek.

Wobec takiego stanu rzeczy postawiono sobie inne pytanie: na którym stopniu nauczania należy wprowadzić pojęcie ułamka? Aby to stwierdzić, należało opracować specjalny materjał, zawierający wyjaśnienia tego trudnego pojęcia. Zadanie to spełniło ciało zbiorowe: H. O. Gillet (kierownik szkoły ćwiczeń przy Uniwersytecie w Chicago), O. F. Bright i Autor. Starannie opracowany materjał odbito na mimeografie i oddano go do przeprowadzenia klasom. Nauczyciele wypełnili szczegółowy kwestjonarjusz, wskazując, gdzie należy poświęcić więcej ćwiczeń, gdzie mniej, jakie wyjaśnienia uważają za niewystarczające, co należy przestawić i t. p. Dopiero na podstawie tych danych nadano pracy formę książki. Doświadczenie wykazało, że — jakkolwiek pojęcie ułamka można podać już na stopniach początkujących, — to jednak najlepiej podawać je na stopniu czwartym.

Dla mnie braki, jakie wykazali uczniowie w zakresie ułamków, były zupełnie naturalne: raczej dziwiłbym się, gdyby było inaczej, o ile — ma się rozumieć — nauczanie ułamków biegło po tej linji, jaką widzieliśmy poprzednio w zakresie liczb całkowitych.

W obecnej postaci sprawa przedstawia się tak: Cały tom ósmy poświęcono wyłącznie wyjaśnieniu pojęcia ułamka.

Sprawę oświetla się z różnych stron na wielkościach ciągłych i zbiorach:

1) Jedna lub więcej części przedmiotu (np. ¼ jabłka, kartki papieru i t. p.).

2) Jeden lub więcej przedmiotów, stanowiących pewną część zbioru (np. dwie zapałki, stanowiące ⅓ całego zbioru zapałek).

3) Jeden przedmiot jako pewna część jednorodnego z nim przedmiotu (np. odcinek, stanowiący ¼ drugiego).

4) Jeden zbiór, stanowiący pewien ułamek innego zbioru jednorodnego z pierwszym (np.: Chłopcy tej klasy stanowią ⅔ chłopców klasy innej).

Całość składa się z ośmiu części (*section*), z których pierwsze cztery omawiają tylko ułamki z licznikiem 1, dalsze zaś cztery — ułamki o licznikach większych od 1. Dobór materjału staranny i urozmaicony. Weźmy dla przykładu część I.

1. Podany jest szereg rysunków (ciastka, jabłka i t. p.). Uczeń wie, na ile części równych jest podzielony przedmiot, wyobrażony na rysunku, a ma odpowiedzieć, jaki to ułamek.

2. Tu zachodzi ta tylko różnica, że uczniowi nie mówi się, na ile części równych podzielono przedmiot, — uczeń musi sam tego dojść z rysunku i wymienić odnośny ułamek.

3. W tym szczeblu uczeń ma zacieniować jakąś część podanego rysunku, np. zacieniować ¼ kwadratu. To stwarza dodatkową trudność techniczną: aby nie mazać książki i ułatwić sprawdzenie, zaleca się przerysowanie podanych rysunków na kalce, wykonanie żądanej czynności, a następnie porównanie własnego wyniku z rysunkiem w odpowiedziach — przez zwykłe nałożenie. Kartki przezroczystego papieru na ten użytek uczniowie nabywają w sklepach.

4. Tu uczeń ma podzielić dany na rysunku przedmiot na żądaną ilość części równych i nad każdą z nich napisać odnośny ułamek.

5. Ostatni szczebel dotyczy porównania dwu jednostek ułamkowych, a więc:

Co większe:	$^1/_4$	czy	$^1/_2$
„ „	$^1/_4$	„	$^1/_8$
„ „	$^1/_2$	„	$^1/_3$

Jako wskazówkę podano w podręczniku: „Pomyśl, cobyś wolał mieć: ¼ pomarańczy czy ½ pomarańczy?" Istotnie — warto się zastanowić. Takich „smakowitych" zadań mamy w tej części dużo. Część druga jest przeprowadzona symetrycznie do pierwszej; występują tu już jednak ułamki o licznikach większych od 1, — sprawa więc nie wymaga osobnego omawiania.

W ten sposób na przestrzeni 140 stronic Książki Ósmej omówiono ułamki o mianownikach 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12. Widzimy, że przyjęto tu inną zasadę przy nauczaniu ułamków, niż u nas.

Wielka ilość różnorodnych przykładów i zadań każe przypuszczać, że uczniowie oswoją się dostatecznie z pojęciem ułamka, zanim przejdą do działań.

Ładne rysunki, dużo kreśleń, dużo różnorodnych zajmujących pytań uprawniają do przypuszczeń, że zainteresowanie ucznia nie osłabnie, — i cel nauczania zostanie osiągnięty.

Dziewiąta Książka jest poświęcona *dodawaniu ułamków* (łącznie ze sprowadzeniem do wspólnego mianownika i skracaniem).

Dziesiąta Książka jest poświęcona *odejmowaniu ułamków*.

Autor pisze, że traktowanie rozdzielne obu tych działań musi nastręczać pewne wątpliwości natury dydaktycznej, — dodaje jednak, że dotąd nie zostało naukowo stwierdzone, co zapewnia większe korzyści przy nauczaniu: traktowanie obu tych działań w korelacji ze sobą, czy rozdzielnie. Nauczyciele, skłonni do prowadzenia współcześnie obu działań, są upoważnieni do przerzucania się od pewnych partyj Książki Dziewiątej do analogicznych Książki Dziesiątej.

W ciągu ośmiu lat czyniono próby przydatności materjału, zanim nie nadano mu formy książek.

Rozpoczyna się od wyjaśnienia terminów „licznik" i „mianownik". Po bardzo lakonicznem wyjaśnieniu procesu dodawania przechodzi się do „przykładów".

Na str. 5 znajdujemy wyjaśnienie dodawania w takiej postaci:

$$\begin{array}{|c|}\hline \frac{1}{12} \\ \frac{5}{12} \\ \frac{5}{12} \\ \hline \frac{11}{12} \\ \hline\end{array}$$

Podaje się wprawdzie obok tego i zapis w wierszu, ale popularniejszy jest podany wyżej.

Następne szczeble zaznajamiają ucznia z ułamkiem niewłaściwym i liczbą mieszaną. Nie zawierają one nic godnego uwagi.

Mam natomiast zastrzeżenie co do t. zw. „reszty ułamkowej" (*Fractional remainders*). Na str. 23 Autor rozważa, jak należy się zachowywać w poszczególnych przypadkach dzielenia niezupełnego, jeżeli chodzi o jakieś sprawy życia praktycznego. Czytamy tam:

„Przypominasz sobie, że przy dzieleniu liczb całkowitych często otrzymywałeś resztę. Zwykle piszemy tę resztę w ten sposób: R 2.

„Przy wyłączeniu całości z ułamka niewłaściwego znaleźliśmy sposób podzielenia naszej reszty. Np., $^{15}/_4 = 3^3/_4$ zamiast 3 R 3. *„Both ways are right"* — mówi z emfazą Autor.

Sprawa ta może zupełnie zamącić uczniom w głowie, gdyż z wyjaśnienia tego wynika, że chodzi tu jedynie o różny zapis tej samej myśli, a przecie rzeczy same są różne. Owo R 3 jest tu tą *„resztą ułamkową"* (3 czwarte), jakkolwiek dawniej on symbol R 3 miał treść inną. Nie rozróżnia się tu pojęcia ilorazu zupełnego i niezupełnego.

W dalszym ciągu omawia się aparat, pozwalający skracać ułamki, mianowicie cechy podzielności przez 2, 3, 5.

Robi się to bardzo prosto. Odnośnie do 2 — podaje się poprostu na szeregu przykładów, że liczby parzyste się dzielą, a nieparzyste — nie.

Odnośnie do 3, — podaje się szereg wielokrotności liczby 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18..., a następnie stwierdza, że t. zw. *„suma cyfr"*, którejkolwiek z napisanych liczb dwucyfrowych jest albo 3, albo 6, albo 9. *„Do you see the trick?"* — pyta Autor. I nie licząc widocznie na to, że *trick* zostanie dostrzeżony, podaje cechę podzielności przez 3.

Czasami dodawanie trzeba prowadzić parokrotnie, np. 75; $7 + 5 = 12$; $1 + 2 = 3$; 75 dzieli się przez 3.

Cechę podzielności przez 5 podano lakonicznie — po wypisaniu szeregu liczb z zerem lub piątką na końcu.

Dodawanie liczb mieszanych wykonywa się tak:

$$\begin{array}{r} 16^2/_3 \\ \underline{112^2/_3} \\ 128^4/_3 = 129\,^1/_3 \end{array}$$

Ten sposób zdaje się zdecydował o zapisie składników ułamkowych w kolumnie, — o czem było wyżej.

Zobaczmy, jak przerabia się sprowadzenie ułamków do wspólnego mianownika. Są tu dwa etapy.

W pierwszym uczeń ma powiedziane, do jakiego mianownika ma sprowadzić ułamki dane; praca jego polega zatem na stosowaniu przekształcenia tych ułamków. W drugim etapie uczeń sam musi znaleźć wspólny mianownik.

Poszukiwanie odbywa się tak: Mamy ułamki $^5/_6$ i $^1/_8$. — 8 nie jest wspólnym mianownikiem, bo 8 nie dzieli się przez 6. — 16 nie jest wspólnym mianownikem, bo 16 nie dzieli się przez 6. — 24 jest wspólnym mianownikiem.

Po rozważeniu czterech podobnych przykładów następuje reguła:

1. Sprawdź największy mianownik, gdyż czasami on okazuje się wspólnym.
2. Jeżeli największy z mianowników nie jest wspólnym, — pomnóż go przez 2 i sprawdź, czy otrzymany iloczyn dzieli się przez każdy z mianowników.
3. Jeżeli otrzymany iloczyn nie jest wspólnym mianownikiem, pomnóż największy mianownik przez 3 i sprawdź znowu.
4. Jeżeli trzecia „próba" nie dała ci wspólnego mianownika, — pomnóż największy mianownik przez 4. „Próbuj" tak dalej, aż znajdziesz wspólny mianownik. Pamiętaj, abyś zawsze mnożył największy z mianowników.

Następują przykłady i stałe uwagi, aby sprowadzać wynik do postaci najprostszej.

Traktowanie odejmowania w Książce Dziesiątej nie wymaga wyjaśnień; jest ono zupełnie analogiczne do tego, cośmy widzieli poprzednio odnośnie do dowania.

Materjał uporządkowany starannie i drobiazgowo, aby z każdą nadarzającą się trudnością uczeń był w stanie sobie poradzić.

Zaleca się taki algorytm dla przypadków trudniejszych:

$$\begin{array}{rcrcr} 18^1/_3 & = & 18^2/_6 & = & 17^8/_6 \\ -\ 6^5/_6 & = & -\ 6^5/_6 & = & -\ 6^5/_6 \\ \hline & & & & 11^3/_6 = 11^1/_2 \end{array}$$

Na str. 27 wprowadza się mnożenie ułamka przez liczbę całkowitą. Bardzo szybkie jest przejście do mechanizacji:

„Zauważ, jak mnożysz ułamek przez liczbę całkowitą:

$$\boxed{\begin{array}{l} 3 \times {}^1/_4 \\ 3 \times 1 = 3 \\ 3 \times {}^1/_4 = {}^3/_4 \end{array}}$$

(1) licznik 1 ułamka ¼ jest pomnożony przez 3,

(2) mianownik pozostaje ten sam."

Żadnego nawiązania do określenia mnożenia niema. Poza tem przykład niefortunny. Zresztą, tu jak i gdzie indziej, chodzi głównie o sprawność rachunkową, — mniej o zrozumienie spraw formalnych.

Algorytm dla przypadków trudniejszych:

$$\boxed{\begin{array}{rl} 78^{3}/_{4} & \\ \times\ 6 & \\ \hline 4^{1}/_{2} & (6\cdot{}^{3}/_{4}) \\ 468 & (6\cdot 78) \\ \hline 472^{1}/_{2} & \end{array}}$$

Sposób ten jest wygodniejszy od zwykłych szkolnych sposobów.

Gorzej jest ze sprawą mnożenia przez ułamek. Na str. 38 czytamy: „Niema w tem nic nowego. Robiłeś to przy dzieleniu, robiłeś również, ucząc się, co to jest ułamek.

$^{1}/_{2}$ z $8 = {}^{8}/_{2} = 4$, $^{1}/_{3}$ z $72 = {}^{72}/_{3} = 24$
$^{1}/_{4} \times 24 = {}^{24}/_{4} = 6$, ($^{1}/_{4} \times 24$ znaczy to samo, co $^{1}/_{4}$ z 24).

Dotąd wszystko w porządku, gdyż uczeń przypomni sobie, że w dzieleniu zapisy: $\frac{1}{4}$ z 24, $24 \div 4$, $\frac{24}{4}$ i t. p. oznaczają to samo, ale dalej na str. 39 mamy:

„Ile to jest $^{2}/_{3}$ z 6? Znajdziemy to, mnożąc licznik przez 6: $6 \times 2 = 12$. Więc $^{2}/_{3} \times 6 = {}^{12}/_{3} = 4$. Że to prawda, spostrzeżesz odrazu: ponieważ $\frac{1}{3}$ z 6 jest 2, więc $\frac{2}{3}$ musi być 4."

To prawda, ale uczeń stwierdzi tylko zgodność wyników, — co jednak będzie wiedział o treści mnożenia przez ułamek? Dlaczego mamy tu mnożyć licznik przez 6?

Cała uwaga zwróci się tu na stronę zewnętrzną i na technikę rachunkową, — a o tę ostatnią przedewszystkiem chodzi Autorowi.

Analogiczne wyjaśnianie podano dla mnożenia ułamka przez ułamek: „$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ otrzymam w ten sposób. Najpierw pomnożę liczniki: $1 \times 1 = 1$. Następnie mianowniki: $2 \times 2 = 4$. Więc $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$."

Jeszcze jeden taki przykład — i koniec. Są wprawdzie dalej rysunki, potwierdzające prawdziwość wyników, ale w dalszym ciągu nic niema o tem, co znaczy „pomnożyć przez ułamek". Czy uczeń sam się domyśli, — należy wątpić. Może resztę dopowie mu nauczycielka, — ale o tem nic nie znalazłem w uwagach do podręcznika.

Reszta — to różnorodne przykłady, metodycznie i starannie dobrane.

Dzielenie ułamka przez liczbę całkowitą opracowano tak: „Podziel 4 piąte przez 2. Odpowiedź jest 2 piąte. prawda?

$$^{4}/_{5} \div 2 = {}^{2}/_{5}.$$

Kilka takich przykładów. To jest słuszne i zrozumiałe, ale dalej na str. 78 czytamy:

$$^{8}/_{9} \div 2 = {}^{4}/_{9} \qquad {}^{8}/_{9} \times {}^{1}/_{2} = {}^{4}/_{9}$$

„Czy widzisz, jakie są podobne te przykłady? Zobaczysz to lepiej, jeżeli napiszemy dzielnik w formie ułamka o mianowniku 1:

$$^{8}/_{9} \div 2 = {}^{8}/_{9} \div {}^{2}/_{1} = {}^{8}/_{9} \times {}^{1}/_{2} = {}^{4}/_{9}$$

„Czy spostrzegłeś, jak przykład na dzielenie zastąpić przykładem na mnożenie? Popatrz na przykład następny:

$$^{6}/_{7} \div 2 = {}^{3}/_{7}, \quad {}^{6}/_{7} \div 2 = {}^{6}/_{7} \div {}^{2}/_{1} = {}^{6}/_{7} \times {}^{1}/_{2} = {}^{3}/_{7}.$$

„Czy widzisz, cośmy zrobili z dzielnikiem? Dzielnik jest 2. Zamieniamy go na $^{2}/_{1}$, a następnie odwracamy go do góry nogami i mnożymy."

Jak widzimy, — wyjaśnienie czysto zewnętrznej natury.

Dzielenie przez dzielnik ułamkowy nawiązuje do mieszczenia jednostki ułamkowej w liczbie całkowitej, później w ułamku, sprowadzając całą sprawę do odwrócenia dzielnika i mnożenia przez tak odwrócony dzielnik.

Techniczna strona, — jak zwykle, — bogata, urozmaicona i metodycznie uporządkowana.

Z materjału nowego mamy tu proste *diagramy* wielkości. Diagramy dotyczą różnych spraw: dni pogodne w ciągu kilku miesięcy, zaludnienie klas, wyczyny (punkty gier sportowych), wzrost uczniów, uczniowie urodzeni zagranicą, statystyka czytelnictwa, oszczędności uczniów, waga uczniów i t. p.

Zadania tu są dwu rodzajów: 1) wyjaśnić dany diagram; 2) sporządzić diagram, mając odpowiednie dane.

Książka Jedenasta ma do czynienia z *ułamkami dziesiętnemi*. Autor zaznacza, że debatowano nad sprawą lokaty tej partji materjału w programie szkolnym. Dotąd nie zostało naukowo stwierdzone, czy lepiej wprowadzać ułamki dziesiętne przed zwyczajnemi. Badania tej sprawy trwają w dalszym ciągu. W podręczniku wyznaczono im tradycyjne miejsce: między ułamkami zwyczajnemi i procentami.

W związku z ważnością układu dziesiętnego jest tu zalecone, aby nauczyciel dał całej klasie uczniów pewne pojęcia o zasadach budowy liczb w tym układzie. Dzieje się to nie w formie wykładów, ale raczej na tle dyskusyj. Autor uważa, że tylko zdolniejsi uczniowie ocenią należycie doniosłość omawianej sprawy, jednak wszyscy powinni odczuć, że wszystko, co robią w zakresie arytmetyki, spoczywa na jakichś racjonalnych podstawach. Żadnych ćwiczeń, ani testów, zmierzających do sprawdzenia osiągniętych w tych dyskusjach korzyści, niema.

Jest to — poza pojęciem ułamka — jedyna wyraźna uwaga, dotycząca wyjaśnienia głębszego pojęć, z któremi uczeń będzie miał do czynienia; wyżej — jak widzieliśmy — poprzestawano na dość pobieżnem przedstawieniu sprawy.

Ułamki dziesiętne wprowadza się w związku z układem monetarnym: dolary i centy, a więc od dwu znaków za kropką dziesiętną.

Zera początkowego nie pisze się. Zapis .20 odpowiada naszemu 0,20 — trzeba zatem dobrze uważać na kropkę dziesiętną.

Pierwsze trzy znaki za kropką dziesiętną omawiane są dość ostrożnie i drobiazgowo. Później podano odrazu tabelę aż do miljonowych i szereg ćwiczeń w czytaniu i pisaniu liczb dziesiętnych. I tu w czytaniu jeden uczeń może kontrolować drugiego według odpowiedzi w podręczniku.

Odnośnie do dodawania liczb dziesiętnych podano tylko taką uwagę, aby przy pisaniu pod sobą składników baczyć na to, żeby kropki dziesiętne przypadały jedna pod drugą. Przykład wyjaśniający podano taki:

$$\begin{array}{r} .005 \\ 2.01 \\ 30. \\ .3 \\ \hline 32.315 \end{array}$$

Odejmowanie wprowadza się równolegle z dodawaniem. Obu działaniom poświęca się stosunkowo niewiele miejsca.

Łatwo przewidzieć, w jaki sposób wprowadza się mnożenie liczb dziesiętnych. Rozpoczyna się od uwagi, że mnożenie liczb dziesiętnych jest równie łatwe, jak mnożenie liczb całkowitych, i zachęca się ucznia, aby uważnie rozpatrzył podane niżej przykłady i zorjentował się co do ilości znaków za kropką dziesiętną.

$$\begin{array}{r} 31.2 \\ \times .3 \\ \hline 9.36 \end{array} \quad \begin{array}{r} .618 \\ \times\ 2 \\ \hline 1.236 \end{array} \quad \begin{array}{r} .8125 \\ \times .2 \\ \hline .16250 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4.26 \\ \times .22 \\ \hline 852 \\ 852\ \ \\ \hline .9372 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times .3 \\ \hline 7.5 \end{array}$$

„Coś zauważył?" — pyta Autor. Poczem następuje omówienie każdego przykładu w tym sensie: „W pierwszym przykładzie mnożysz liczbę z jednym znakiem za kropką dziesiętną przez liczbę z jednym znakiem za kropką dziesiętną. W odpowiedzi masz liczbę z dwoma znakami za kropką dziesiętną." Po omówieniu wszystkich przykładów podano algorytm w pięciu punktach:

1. Mnóż, jak liczby całkowite.
2. Policz znaki dziesiętne w liczbie, którą mnożysz.
3. Policz znaki dziesiętne w liczbie przez którą mnożysz.
4. Dodaj te dwie liczby znaków dziesiętnych razem.
5. Odetnij tyleż znaków dziesiętnych w odpowiedzi, zaczynając oczywiście od strony prawej.

U nas szukanoby wyjaśnienia tego algorytmu w oparciu o mnożenie ułamków zwyczajnych; tam — jak widzimy — poprzestają na stwierdzeniu pewnego faktu i przechodzą do ćwiczeń technicznych. Ćwiczeń sporo.

Dzielenie liczb dziesiętnych słusznie rozpoczęto od dzielnika całkowitego jednocyfrowego. Rozpatrzono wszelkie możliwe trudności. W przypadkach niepodzielności jest tylko uwaga, aby poniechać dalszego po uzyskaniu trzech znaków za kropką dziesiętną. Żadnych wyjaśnień co do przybliżeń. Później to samo z dzielnikiem całkowitym dwucyfrowym. Przy sposobności zamienianie ułamków zwyczajnych na dziesiętne, co później jest wyzyskane w działaniach, jak np.

$$\begin{array}{rcr} 16^3/_4 & = & 16.75 \\ \times\ 2^1/_2 & = & 2.5 \\ \hline & & 8375 \\ & & 3350\ \ \\ \hline & & 41.875 \end{array}$$

Dzielenie liczby dziesiętnej przez dziesiętną wprowadza się na zadaniu:

„Mamy w naszej szkole sklepik szkolny. Chcemy sprzedać tyle książeczek z wierszami, aby zapłacić rachunek drukarni. Rachunek wynosi $ 28.75. Ile książeczek po $.25 musimy sprzedać, aby zapłacić rachunek?

Musimy podzielić $ 28.75 przez $ .25. Czy musimy położyć kropkę dziesiętną w odpowiedzi nad kropką dziesiętną dzielnej? Zobacz, coby było.

$$\begin{array}{rl} & 1.15 \\ 25) & \overline{28.75} \\ & 25 \\ & \overline{\ 3.7} \\ & \ 2.5 \\ & \overline{\ 1.25} \\ & \ 1.25 \\ & \overline{} \end{array} \qquad \textit{Źle}$$

Wynikłoby, że mamy sprzedać 1.15 książeczek. Tak być nie może, gdyż to mniej niż 2 książki, a my musimy ich sprzedać znacznie więcej celem uregulowania rachunku.

Cały kłopot polega na tem, że nie uczyłeś się, jak dzieli się liczbę dziesiętną przez dziesiętną. Łatwo się tego nauczyć. Zobacz, czybyś nie umiał powiedzieć, jak się to robi:

$$.2)\overline{.8} = 2.)\overset{4}{\overline{8.}} \qquad 1.2)\overline{21.0} = 12.)\overset{20}{\overline{240}} \qquad .25)\overline{.175} = 25.)\overset{.7}{\overline{17.5}}$$

Znowu omówienie tego, co zrobiliśmy z kropką dziesiętną, i podanie reguły postępowania. W dalszym ciągu ćwiczenia. W ćwiczeniach spotykamy się z różnemi możliwemi trudnościami, z jakiemi uczeń musi umieć sobie radzić. Całość tych ćwiczeń ułożona metodycznie.

Tom zakończono wyjaśnieniami układu dziesiątkowego pozycyjnego oraz mnożenia i dzielenia przez 10^n.

K s i ą ż k a D w u n a s t a i ostatnia zajmuje się *procentami*. Wyłożono tu tylko zagadnienie takie: „obliczyć dany % liczby danej". Zagadnienie: „jaki % jednej z dwu liczb danych stanowi druga?" uznano za przedwczesne i przeniesiono je do następnego roku nauczania. Autor zaznacza, że dzieci w wieku 12 lat 4 mies. (rok 6. nauczania) mogą z powodzeniem rozwiązywać zagadnienie pierwsze.

Podano tu dużo przykładów i zadań z życia praktycznego. Nie usiłowano wcale zapoznać uczniów z rachunkiem %-owym, stosowanym w handlu, przenosząc całą uwagę na zagadnienia prostsze, aby dzieci oswoiły się należycie z pojęciem procentu.

Procent określono (str. 3) jako „setne" („*Per cent" is just another name for „hundredths*").

„Właściwie już wiesz, jak sobie radzić z zagadnieniami procentu, — tyle, żeś pisał to inaczej i nazywał ułamkami dziesiętnemi. Pisałeś $^{25}/_{100}$ jako .25; mógłbyś to napisać jako 25%. Zauważ, że tu niema kropki dziesiętnej. Możesz to nazywać 25 procent, ale znaczy to .25."

Po takich wyjaśnieniach wstępnych odrazu przejście do ćwiczeń w rodzaju ¼ = .25 = 25% .

Następnie: Ile jest 25% ośmiu? 25% = ¼ ośmiu czyli 2.

Jak widzimy, procentu nie określa się, jako pewnej formy stosunku (25 : 100), ale przyporządkowuje się procentowi pewien ułamek, wskutek czego w dalszym ciągu zagadnienia operuje się już tylko tym ułamkiem. Inaczej tu być nie mogło, gdyż nigdzie nie opracowano pojęcia stosunku.

Pierwsze ćwiczenia polegają na przejściu od procentów do ułamków i nawzajem — od ułamków na %. Ćwiczeń tych jest sporo. Zaleca się, żeby ważniejsze z nich (częściej używane) umieć napamięć.

W dalszym ciągu uczniowie stosują wiadomości o procentach do zadań handlowych. Rachunki są bardzo proste, np.: „Sklepik uczniowski nabywa ołówki po cenie katalogowej $ 6.00 za gros, otrzymując 25% opustu (*discount*). Ile płaci za 1 gros ołówków?

Cena	$ 6.00
opust	1.50
Płaci	$ 4.50

Trudności są raczej technicznej natury, gdyż same zagadnienia nie nastręczają wątpliwości.

Zadania są bardzo urozmaicone w treści i dotyczą różnych dziedzin życia. Dużo uwagi poświęca się w zadaniach sportom, zarobkowaniu uczniów, dobroczynności, — są jednak i zadania, dotyczące osób dorosłych, jak np.: „Rachunek miesięczny za gaz wynosi $ 4.50. O ile opłaca się rachunek przed 10 dniem miesiąca, otrzymuje się 2% opustu. Ile zaoszczędzę, regulując rachunek przed 10.?" I t. p.

W dalszym ciągu omawia się obroty pieniężne. Mamy tu zadania typu: „Obliczyć odsetki od kapitału danego za dany okres czasu według danej stopy %. Wiele ćwiczeń ujęto w schemat:

Kapitał	Stopa %	Czas	Odsetki
$ 8500	4%	1 rok	?
$ 475	5%	$^1/_2$ roku	?

Następnie uczniowie zaznajamiają się z operacjami kas oszczędności. Podane są wzorce książeczek oszczędnościowych, — wraz z wpisanemi pozycjami i szeregiem wskazówek, jak istotnie prowadzi się rachunki w kasach (między innemi uwaga pożyteczna, że kwoty mniejsze od dolara nie procentują).

Dalej nie spotykamy nic osobliwego; mamy tylko procenty powyżej 100%, procenty w bardziej zawiłych przypadkach, jak 83⅓% i t. p.

Na zakończenie podano coś w rodzaju zestawienia pojęcia % z ułamkami dziesiętnemi i zwyczajnemi, a to celem stwierdzenia, w jakim stopniu pojęcie % zostało opanowane.

Na str. 83 czytamy: „Zobaczmy, jak rozumiesz, co znaczy procent. Co jest więcej? 4%, .4 czy ¼? Jeżeli nie wiesz odrazu, napisz to w ułamkach dziesiętnych: .04, .4, .25. Teraz powinieneś odpowiedzieć natychmiast, ale jeżeli nie jesteś pewien, dopisz zera gdzie należy, abyś miał wszędzie jednakową ilość znaków za kropką dziesiętną, jak oto: .04, .40, .25. Teraz widzisz, że .40 jest największe." Następują ćwiczenia.

Ostatnie stronice poświęca się rekapitulacji opracowanego dawniej materjału. Mamy tu:

1. Cztery działania na liczbach całkowitych.
2. Rozszerzenie numeracji ustnej i pisemnej do 9 miejsc.
3. Jednostki miar długości, ciał ciekłych i czasu wraz z działaniemi na t. zw. „liczbach mianowanych".
4. Pojęcie ułamka.
5. Działania na ułamkach.
6. Diagramy.
7. Działania na liczbach dziesiętnych.
8. Procenty.
9. Różne zagadnienia na zastosowanie zdobytych w całym kursie wiadomości.

Widzimy z tego pobieżnego przeglądu całości, że program przedstawia się dość skromnie: 4 działania na liczbach całkowitych, ułamkach zwyczajnych i dziesiętnych, wiadomości wstępne o procentach, elementy wiadomości o diagramach wielkości, — i wszystko. Cała uwaga zato jest przeniesiona na stronę techniczną sprawności. Wszystko zmierza do tego, aby uczeń umiał rachować.

Stronie pojęciowej przedmiotu poświęca się bardzo mało uwagi. Ciekawe byłoby stwierdzić, jak sobie wychowankowie szkół w Winnetce radzą w dalszym ciągu z matematyką, — bo dotąd niewiele zrobiono w kierunku przygotowania ucznia do tej specjalnej dziedziny wiedzy.

Mam wrażenie, że muszą tam być duże braki. Przenoszenie uwagi na stronę techniczną — bez jakiego takiego oświetlenia przedmiotu — jest groźne, może się bowiem okazać, że uczniowie młócą pustą słomę.

Znamienną pod tym względem jest uwaga do tomu ósmego, gdzie stwierdzono zupełne niezrozumienie pojęcia ułamka u tych uczniów, którzy już cały materjał niby opracowali.

Jeżeli natomiast chodzi o technikę rachunkową, to odnosi się wrażenie, że przy tak pomyślanym aparacie sprawa ta musi się przedstawiać dobrze.

Trudno mi było zorjentować się, w jakim stopniu uczniowie tamtejsi opanują rachunek pamięciowy, — jedyną bowiem sposobnością do zastosowania tego rachunku byłyby zadania tekstowe, — nie wiem jednak, czy uczniowie rozwiązują je pamięciowo (te przynajmniej, które się nadają do rachunku pamięciowego. Jestem skłonny przypuszczać, że wczesne wprowadzenie algorytmu pisemnego wyrobi w uczniach dużą skłonność do posługiwania się w rachunkach ołówkiem.

Najważniejszą zaletą omawianego sposobu nauczania jest istotnie to, że nadaje się on do pracy samodzielnej ucznia, że zmusza go do dokładności w pracy i do osiągnięcia pewnego *optimum* dokładności (biegłości) w rachunkach — z wyraźnem jednak zaniedbaniem strony pojęciowej przedmiotu.

Nasi uczniowie nie mają nigdy dość czasu na rachunki, gdyż uczą się — zbyt może wcześnie — *matematyki*; tamci znów stają się zbyt wcześnie *rachmistrzami* — i nie mają czasu na matematykę.

Możeby ktoś z naszych autorów zechciał opracować podobny kurs arytmetyki i pogodził dwa te stanowiska, — zwłaszcza, że program dla szkoły powszechnej i gimnazjum niższego domagać się tego będzie natarczywie: możebyśmy nareszcie w Polsce nauczyli się rachować i jednocześnie nabrali gustu dla rzekomo suchej matematyki.

= WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE. Redaktor i Wydawca S. Dickstein. Tom XXXII. Warszawa 1929—1930. Skład główny w księgarni Gebethnera i Wolffa.

Treść zeszytu 1: M. Kamieński. Dalekomierz lodowy o pionowej bazie. (Str. 35, rys. 8.) — W. Lorey. Rola matematyki ubezpieczeniowej wewnątrz wiedzy i praktyki ubezpieczeń. (Str. 24.) — S. Steckel. O zbieżności pewnego algorytmu nieskończonego. (Str. 9.) — W. Gorczyński. O pierwszej konferencji międzynarodowej w sprawie ozonu i jego absorbcji. (Str. 4.)

Treść zeszytu 2: E. Stamm. O metodach rachowania. (Str. 17.) — A. Walfisz. Referat o „Odczytach z teorji liczb" E. Landaua. (Str. 58.) — E. Arendt. Zastosowanie teorji Natansona i Smoluchowskiego do wyprowadzenia niektórych wzorów kinetycznej teorji gazów. (Str. 7.) — Komunikaty. Przegląd literatury. Notatki bibljograficzne.

= MATHESIS POLSKA, czasopismo poświęcone naukom ścisłym i ich metodologji, wydawane przez Stanisława Warhaftmana. Tom V. Rok 5. Nr. 9—10. 1930. Str. 171—218 i spis rzeczy tomu V.

Treść: E. Rybka. Rozkład gwiazd i integralnego blasku w gromadzie kulistej Messier 3.— E. Stenz. Kształt sklepienia niebieskiego według badań M. Ernsta. — S. Szczeniowski. Względnościowa mechanika falowa według Dirac'a *(dokończenie).* — Notatki. — Bibljografja. — Zadania.

= MATHESIS POLSKA, czasopismo poświęcone naukom ścisłym i ich metodologji, wydawane przez Stanisława Warhaftmana. Tom VI. Rok 6. Nr. 1—2. Str. 1—42.

Treść: E. Poznański i A. Wundheiler. Rola pojęcia koincydencji przy rewizji podstaw fizyki. — Notatki. — Kronika. — Bibljografja. — Zadania. — Kurjoza.

= URANJA, czasopismo Polskiego Tow. Przyjaciół Astronomji. Pod redakcją Dr. Lucjana Orkisza i Dr. Eugenjusza Rybki. Dodatek do *„Mathesis Polskiej"*. Rok 10. Nr. 1. Str. 1—22.

Treść: W. Opolski. Mgławice pozagalaktyczne. — Kronika. — Bibljografja.

= ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNI MATEMATIKY A FYSIKY. Rediguje Bohumil Bydžovský. Vydává Jednota Československých Matematiků a Fysiků. (PRAHA II, Hopfenštoková 9.). Ročník LIX. W Praze, 1929-30. — Str. 284.

Wychodzi 4 zeszyty rocznie. Do „Časopisu" załączony jest dodatek:

= PŘILOHA DIDAKTICKO-METODICKÁ. Rediguje Jaroslàv Friedrich. Ročník V. 1929-30. — Str. 56.

Čislo 1—2: V. Petržílka. Opis aparatury do budzenia bardzo krótkich nietłumionych fal elektromagnetycznych. — F. Ondrák. Zadania słowne, zwłaszcza arytmetyczne, w nauczaniu matematycznem. — J. Vavřinec. Mniej tablicy i mniej kredy! — J. Šoler. O demonstrowaniu elektryczności tarcia. — Dr. V. Štech. O doświadczeniu Melde'go. — Dr. L. Seifert. O rzutowaniu na jedną płaszczyznę rzutów. — Drobiazgi. — Z literatury.

Čislo 3: Dr. F. Pietsch. Mierzenie samoindukcji cewki bez rdzenia żelaznego. — Ing. F. Císař. Kinematografja przy nauczaniu matematyki. — B. Matas. Rzutowanie na jedną płaszczyznę rzutów. (Przyczynek do dyskusji.). — J. Machač. O przygotowaniu prac w pracowni fizykalnej. — Dr. Vl. Ryšavý. Uwagi o skróconem mnożeniu. — Drobiazgi. — Z literatury.

Dla uczniów szkół średnich wychodzi czasopismo:

= ROZHLEDY MATEMATICKO-PŘIRODOVĚDECKÉ. Přílohy k Časopisu pro Pěstování Matematiky pro studující škol středních. Rediguje Dr. Vladimír Ryšavý. Ročnik IX. W Praze. 1929-30. — Str. 180.

Čislo 1: Dr. K. Koutský. O rozkładzie liczb na cztery kwadraty. — Dr. J. Schuster. Przyczynek do geometrji czworokątów. — R. Hrudička. Początki mierzenia ciśnienia barometrycznego w Czechach. — Dr. V. Petržílka. Mierzenie samoindukcyj, pojemności i wzajemnych indukcyj. — Zadania konkursowe z matematyki i z fizyki. — Bibljografja.

Čislo 2: Vl. Kučera. Przyczynek do rozwiązania równania $ab(a^2 + b^2) = cd(c^2 + d^2)$. — Dr. J. Schuster. Elementarne wyprowadzenie newtonowskiego potencjału kuli. — K. Regner. Moderator tantalowy. — Dr. A. Dittrich. Tebańskie tabele gwiazd godzinowych. — B. Kaufman. Konstrukcja elipsy zapomocą średnic sprzężonych. — Przegląd.

Čislo 3—4: Dr. K. Koutský. Rozwiązanie równania dwumiennego i konstrukcja wielokątów foremnych, wpisanych w koło. — Dr. K. Koutský. O powinowactwie kołowem. — D. A. Vondráček. Cyklografja i jej zastosowanie. — J. Fischer. Mechanika falowa. — M. Hlaváček. O jednoczesności. — Dr. R. Plajner. Mierzenie własności magnetycznych żelaza metodą toroidu i galwanometru balistycznego. — M. Vaníček. O czułości galwanometru. — Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki. — Przegląd.

= KALENDARZ | ASTRONOMICZNY | Polskiego Towarzystwa Przyjaciół Astronomji | na rok | 1931 | Wydawnictwa | rok piąty | Warszawa Skład Główny w Kasie im. J. Mianowskiego | Nowy Świat 72 — Pałac Staszica | 1931.

For. 24 × 17. Str. $4^0 + 48$. Cena zł 5.—.

Część II (stała) Kalendarza, wydana w roku 1929, jest do nabycia jako oddzielna odbitka w cenie 2,50 zł za egzemplarz.

= THÉORIE MATHÉMATIQUE DES ASSURANCES | par | Henri Galbrun | Docteur ès sciences | Actuaire de la Banque de Paris et des Pays-Bas | Librairie Armand Colin | 103, Boulevard Saint-Michel, Paris | 1931

W nagłówku: Collection Armand Colin (*Section de Mathématiques*).

For. 17 × $10\frac{1}{2}$. Str. 203. Cena fr. fr. 10,50.

= Dr. Eugenjusz Rybka | ĆWICZENIA Z GLOBUSEM | ZIEMSKIM w szkole średniej | Z 4 ilustracjami i 1 tablicą astronomiczną | | Lwów—Warszawa—Kraków | Wydawnictwo Zakładu Narod. im. Ossolińskich | 1928 = *W nagłówku:* Wydawnictwo Pracowni Geograficznej Ministerstwa Wyznań | Religijnych i Oświecenia Publ. dla nauczycieli szkół średnich | pod redakcją wizytatora Dr. W. Jezierskiego

For. 16 × 12. Str. 35 + 1^0, rys. 4.

= Dr. Witold Rybczyński | REPETYTORJUM | MATEMATYKI W ZADANIACH | dla uczniów gimnazjum wyższego | w szczególności do użytku abiturjentów || Książnica-Atlas || Lwów—Warszawa | 1931.

For. $22^1/_2$ × 15. Str. 115 + 1^0. Cena zł . . .

= Wincenty Lewicki | II | RACHUNKI | dla drugiego oddziału szkół powszechnych || Cena 2 zł | Lwów 1931 | Nakładem Państwowego Wydawnictwa Książek Szkolnych | w Kuratorjum Okręgu Szkolnego Lwowskiego.

For. 23 × 15. Str. 128, z rys. Cena zł 2,—

KRONIKA.

= DRUGI ZJAZD MATEMATYKÓW POLSKICH. Drugi Zjazd Matematyków Polskich odbędzie się w Wilnie w dniach od 23 do 26 września r. b. staraniem Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Podczas Zjazdu odbywać się będą ogólne posiedzenia naukowe z odczytami oraz posiedzenia sekcyj z komunikatami i dyskusją.

I. Logika. Podstawy matematyki.
II. Teorja mnogości. Topologja. Teorja funkcyj rzeczywistych
III. Arytmetyka. Algebra. Analiza.
IV. Geometrja.
V. Fizyka matematyczna. Astronomja. Matematyka stosowana.
VI. Dydaktyka. Historja matematyki.

Uczestnicy Zjazdu dzielą się na czynnych i towarzyszących. Uczestnicy czynni mogą wygłaszać komunikaty naukowe na posiedzeniach sekcyj oraz brać czynny udział w dyskusjach i obradach Zjazdu. Wszyscy uczestnicy mogą brać udział w posiedzeniach, przyjęciach i wycieczkach Zjazdu.

Zapowiedź uczestnictwa należy zawczasu przesłać pod adresem Komitetu Organizacyjnego i jednocześnie wpłacić na konto P. K. O. Nr. 45 772 *(Prof. Kazimierz Jantzen, Zakretowa 15, Wilno)* 15 złotych od każdego krajowego uczestnika czynnego i 10 złotych od uczestnika towarzyszącego.

Uczestnicy życzący sobie wygłosić komunikaty proszeni są o wypełnienie kartek tematowych i nadesłanie ich przed 20 czerwca. Na każdy komunikat przeznaczony będzie w programie 20 minut. Komunikaty mogą być wygłaszane po polsku lub w jednym z języków przyjętych na międzynarodowych kongresach matematycznych. Tematy zgłoszonych komunikatów zostaną ogłoszone drukiem w programie szczegółowym, który będzie rozdany przed otwarciem Zjazdu.

Uczestnicy krajowi będą mogli korzystać z 50% zniżki kolejowej w drodze powrotnej na podstawie kart uczestnictwa, które będą wydawane podczas Zjazdu.

W dniach od 22 do 26 września czynne będą biura informacyjne na dworcu i w gmachu głównym Uniwersytetu. Uczestnicy Zjazdu mogą zamawiać, za pośrednictwem Komitetu Organizacyjnego, pomieszczenia w hotelach, pensjonatach, mieszkaniach prywatnych i w bursie akademickiej. Utrzymanie w pensjonacie kosztuje 6 złotych dziennie od osoby.

Dalsze zawiadomienia i program tymczasowy Zjazdu zostaną rozesłane wszystkim, którzy nadeślą zgłoszenia uczestnictwa.

KOMITET ORGANIZACYJNY:

Przewodniczący *Wiktor Staniewicz.*

Zastępcy przewodniczącego: *Juljusz Rudnicki, Władysław Dziewulski.*

Sekretarz *Stefan Kempisty.* Skarbnik *Kazimierz Jantzen.*

Referent program. *Antoni Zygmund.* Gospodarz *Stan. Krystyn Zaremba.*

Członkowie: *Wacław Dziewulski, Józef Patkowski, Jan Weyssenhoff.*

ADRES KOMITETU ORGANIZACYJNEGO:

Seminarjum Matematyczne Uniwersytetu Stefana Batorego, Zamkowa 11, Wilno.

= KURSY WAKACYJNE W ROKU 1930. W ciągu wakacyj r. b. odbyły się następujące kursy wakacyjne dla kwalifikowanych nauczycieli szkół powszechnych:

Miejscowość	Temat	Słuchacze	Prelegenci
Nowy Sącz (okr. krak.)	Matem.	44	Antoni Krawczyk (Kraków) Stanisław Zakrocki (Kraków)
Lublin (okr. lubelski)	Fizyko-mat.	100	Konstanty Chomiczuk (Lublin) Józef Bogucki (Lublin) Dr. Kazimierz Frycz (Lublin) Alojzy Szubartowski (Szczebrzeszyn)
Brody (okr. lwowski)	Fizyko-mat.	44	Dr. Arnold Freilich (Lwów) Jan Zbiegień (Lwów)
Brześć n/B. (okr. poleski)	Fizyko-mat.	35	Leonard Klóskowski (Poznań) Kazimierz Chmielewski (Słonim)
Grudziądz (okr. pomorski)	Fizyko-chem.	37	Adolf Ojak (Grudziądz) Konstanty Parzych (Grudziądz) Juljan Zelek (Grudziądz)
Wolsztyn (okr. pozn.)	Fizyko-mat.	39	Dr. Karol Adwentowski (Wolsztyn) Marjan Węgrzynowicz (Poznań)
Warszawa (okr. warsz.)	Fizyko-chem.	55	Lucjan Paczóski (Warszawa) Jarosław Chełmiński (Warszawa) Mieczysław Cieśluk (Grodno) Leon Gapiński (Poznań) Witold Lubbé (Warszawa
Krzemieniec (okr. wołyński)	Fizyko-mat.	34	Stanisław Kempf-Sokorski (Krzem.) Zdzisław Zaremba (Krzemieniec.)
Grodno Z. P. N. S. P.	Fizyko-mat.	17	P. Halfter (Grodno).

= KURSY WAKACYJNE DLA NAUCZYCIELI SZKÓŁ POWSZECHNYCH. Wzorem lat ubiegłych Ministerstwo W. R. i O. P. organizuje w bieżącym roku liczne kursy wakacyjne dla wykwalifikowanych nauczycieli szkół powszechnych.

WARSZAWA. — *Wakacyjne Ognisko Fizyko-Matematyczne.* — *W. K. N.* — Tematy są obliczone na 60 godzin pracy na kursie. Ze względów organizacyjnych utworzone będą dwie grupy tematów M i N.

Grupa M.

1. Nauka o cieple (Temperatura. Ilość ciepła. Zmiany stanu skupienia. Mechaniczny równoważnik ciepła. Maszyny kaloryczne, przenoszenie energji cieplnej. Meteorologja.)
2. Nauka o prądzie elektrycznym (galwanicznym i indukcyjnym). — Materjał laboratoryjny na poziomie szkoły powszechnej.
3. Nauka o prądzie elektrycznym (o chemicznem, cieplnem i magnetycznem działaniu prądu). — Temat ten jest przeznaczony tylko dla tych, którzy opracowali na kursie temat Nr. 2, z uwzględnieniem wymagań, stawianych eksternistom W. K. N.
4. Przygotowanie ćwiczeń praktycznych z fizyki w zakresie programu szkoły powszechnej i tworzenie pracowni propedeutycznej w zakresie fizyki.
5. O działaniach arytmetycznych. Definicja i własności działań na liczbach naturalnych. Rozszerzenie pojęcia tych działań na liczby bezwzględne (ułamkowe i niewymierne). Działania na liczbach rzeczywistych względnych. W miarę rozważań — przegląd i uzasadnienie działań arytmetycznych według programu wyższych oddziałów szkoły powszechnej.

Grupa N.

6. Tlenowa teorja spalania w powietrzu, rdzewienie i oddychanie, synteza substancyj organicznych w roślinie.
7. Przygotowanie ćwiczeń praktycznych z chemji w zakresie programu szkoły powszechnej i tworzenie pracowni.
8. Idea stopniowego rozszerzenia zakresu pojęcia liczby z uwagami metodycznemi do programu arytmetyki w szkole powszechnej.
9. Metody przedstawienia utworów przestrzennych na płaszczyźnie (rzutowanie prostopadłe i ukośne).

Słuchacz może wybrać sobie z każdej grupy tylko jeden temat. Dwóch tematów z tej samej grupy łączyć nie należy.

MYŚLENICE (okr. krak.). — *Fizyko-matematyczny.* — Nauka o prądzie elektrycznym (galwanicznym i indukcyjnym). — Metody rozwiązywania zagadnień algebraicznych. — *W. K. N.*

LUBLIN (okr. lubel.). — *Fizyko-matematyczny.* — Ćwiczenia praktyczne z fizyki w zakresie programu szkoły powszechnej. — Teorja mierzenia wielkości geometrycznych. Teorja liczb niewymiernych. Odcinki proporcjonalne. Nauka o wielomianach. Elementarne metody rozwiązywania równań z jedną niewiadomą. — *W. K. N.*

BRODY (okr. lwow.). — *Fizyko-matematyczny.* — Tematy jak Nr. 1 i 9 dla Ogniska Warszawskiego. *Kurs przeznaczony przedewszystkiem dla nauczycielstwa, prowadzącego naukę matematyki i fizyki w wyższych oddziałach szkoły powszechnej.* — *W. K. N.*

LWÓW (okr. lwow.). — *Georgaficzno-fizyczny.* — Rozważania, wprowadzające w teorję elektryczności. Elektroliza. Prąd polaryzacyjny. Prąd elektryczny w gazach rozrzedzonych, promienie katodowe, kanałowe i Roentgena. Zasady teorji jonów. Jonizacja gazów i par. Zasady teorji elektronów. — Wybrane zagadnienia z kosmografji. —

Zwiedzanie elektrowni i obserwatorjum astronomicznego. — *Kurs przeznaczony dla słuchaczy, którzy ukończyli grupę geogr.-przyr. W. K. N. lub zdali odpowiednią część egzaminu z W. K. N.*

LWÓW (okr. lwow.). — *Radjotechniczny.* — Zasadnicze wiadomości z elektrotechniki. Fale elektromagnetyczne. Nadawcze stacje radjotelegraficzne iskrowe. Odbiór fal gasnących. Systemy radjotelegraficzne, dające fale niegasnące. Lampy katodowe. Radjotelefonja i radjofonja. Odbiorniki lampowe. Ćwiczenia pomiarowe i montażowe. — Zajęcia praktyczne w pracowni radjotechnicznej.

BRZEŚĆ nad Bugiem (okr. poleski). — *Fizyko-matematyczny.* — Pola grawitacyjne, elektryczne, magnetyczne i elektromagnetyczne. Energja promienista i jej przejawy. — O działaniach arytmetycznych. Definicje i własności działań na liczbach naturalnych. Rozszerzenie pojęcia tych działań na liczby bezwzględne (ułamkowe i niewymierne) oraz na liczby względne. Zasada zachowania formalnych własności działań. — *W. K. N.*

LESZNO (okr. pozn.). — *Fizyko-chemiczny.* — Tematy jak Nr. 4 i 7 dla Ogniska w Warszawie. — *Kurs przeznaczony dla nauczycieli, odczuwających zasadnicze braki w przygotowaniu.* — *W. K. N.*

Wszystkie zacytowane kursy odbędą się w pierwszym terminie (od 2 lipca do 30 lipca). — Kursy, znaczone literami *W. K. N.*, zawierają fragmenty programu Wyższego Kursu Nauczycielskiego.

= KURSY WAKACYJNE DLA NAUCZYCIELI SZKÓŁ ŚREDNICH. W czasie wakacyj roku 1931 Ministerstwo W. R. i O. P. organizuje kursy wakacyjne dla nauczycieli matematyki i fizyki w szkołach średnich ogólno-kształcących i zakładach kształcenia nauczycieli.

NOWY TARG (okr. krak.) — w terminie od 6 do 30 lipca r. b. odbędzie się kurs *matematyczny* pod kierownictwem naukowem Prof. Dr. Stefana Straszewicza. Temat zasadniczy programu: *zagadnienia geometryczne.*

1. Doc. Dr. O. Nikodym. *Geometrja wykreślna* . . 24 godz.
2. Prof. Dr. S. Mazurkiewicz. *Wybrane zagadnienia z topologji* . . . . 12 godz.
3. Prof. Dr. S. Straszewicz. *Zarys geometrji rzutowej* . . . . 20 godz.
4. Prof. Dr. S. Straszewicz. *Konferencje ze słuchaczami w związku z wykładami* . . . . 6 godz.
5. Doc. Dr. A. Tarski. *Geometrja elementarna (rozdziały wybrane)* . . . . 24 godz.
6. Prof. Dr. K. Ajdukiewicz. *Geometrja a doświadczenie* . . . . 6 godz.
7. Instruktor min. B. Bielecki. *Rola nauczania matematyki w wychowaniu obywatelsko-państwowem* . . . . 2 godz.
8. Wizytator min. Z. Szulczyński. *Z zagadnień psychologji wychowawczej* . . . . 4 godz.

Uwaga. Sprawozdanie z zeszłorocznego kursu matematycznego w Pucku było podane w *Parametrze* Nr. 6.

WARSZAWA — w terminie od 6 do 30 lipca odbędzie się kurs *fizyczny* pod kierownictwem naukowem Prof. Dr. S. Pieńkowskiego. Temat zasadniczy programu: *promieniotwórczość.*

1. Dr. S. Szczeniowski. *Rozwój teorji kwantów. Idee mechaniki falowej* . . . . 8 godz.
2. Prof. Dr. S. Pieńkowski. *Współczesna optyka cząsteczek i ich budowa* . . . . 8 godz.
3. Prof. Dr. S. Pieńkowski. *Promienie Roentgena* 8 godz.
4. Dr. C. Pawłowski. *Promieniotwórczość i jej zagadnienia współczesne* . . . . 4 godz.
5. Dr. W. Kapuściński. *Budowa atomu a układ perjodyczny pierwiastków* . . . . 4 godz.
6. Prof. Dr. S. Ziemecki. *Zagadnienia z fizyki współczesnej, nadające się dla kursu fizyki w szkole* . . . 3 godz.

Pracownie (w podziale członków na grupy):
1) *Promieniotwórczość* . . . . 12 godz.
2) *Promienie X* . . . . 6 godz.
3) *Optyka* . . . . 16 godz.
4) *Elektryczność* . . . . 17 godz.

7. *Wychowanie obywatelsko-państwowe na podstawie wykładania fizyki* . . . . 2 godz.
8. *Z zagadnień psychologji wychowawczej* . . . . . 4 godz.

(Prelegenci będą ogłoszeni osobno).

PŁOCK — w terminie od 3 do 30 lipca r. b. odbędzie się kurs *fizyko-matematyczny:* metody laboratoryjne w nauczaniu fizyki i chemji. Wykładający: Jan Pniewski, instruktor ministerjalny, i Teofil Czarniecki, nauczyciel państwowego seminarjum nauczycielskiego w Białymstoku. *Kurs jest przeznaczony wyłącznie dla nauczycielstwa zakładów kształcenia nauczycieli.* Celem kursu będzie dokładne zaznajomienie uczestników z programem i metodą nauczania fizyki i chemji w seminarjach nauczycielskich oraz opanowanie techniki przygotowania i przeprowadzenia ćwiczeń uczniowskich i pokazów.

Program pracy:
a) ćwiczenia własnoręczne uczestników kursu w zakresie programu seminarjum;
b) konferencje i dyskusje;
c) organizacja i urządzenie pracowni fizyko-chemicznej;
d) lektura nauczyciela i ucznia;
e) zaznajomienie uczestników kursu z różnemi typami przyrządów fizycznych.

KĄCIK BEZ TYTUŁU.

Co to jest weksel?

— Proszę mi wytłumaczyć w kilku słowach, co to jest weksel.

— Weksel? Rzecz bardzo prosta. Przypuśćmy, że pan mnie pożyczył 1000 franków, a ja panu wydałem weksel z terminem trzymiesięcznym. Oznacza to, że w ciągu trzech miesięcy nie ma pan prawa, — ale pan rozumie, — nie ma pan najmniejszego prawa żądać ode mnie gotówki. No, a po trzech miesiącach, kiedy upłynie termin weksla, będzie pan miał prawo dopominać się pieniędzy chociażby codziennie...

(*Satyricon, Paris.*)

ROZWIĄZANIA ZADAŃ.

Nr. 79. *Układ równań.* Dany jest układ równań

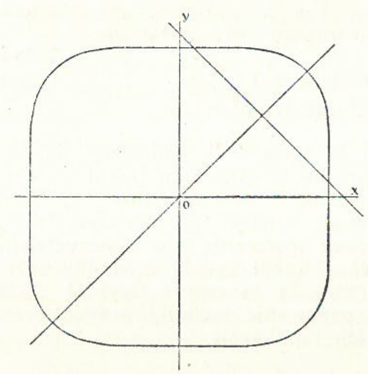
(1) $x^4 + y^4 = a.$

(2) $x + y = b.$

Podać rozwiązania oraz zbadać liczbę rozwiązań w zależności od danych a i b.

Rozwiązanie analityczne dane było w poprzednim zeszycie. Teraz dajemy jego interpretację graficzną.

Interpretacja geometryczna. Przy $a > 0$ równanie (1) wyznacza w prostokątnym układzie współrzędnych linję krzywą zamkniętą takiej postaci, jak to przedstawiono na wykresie. Równanie (2) wyznacza



linję prostą. Obie te linje mają oś symetrji $y = x$. — Prosta (2) jest styczną do krzywej (1) w punkcie $(+\frac{1}{2}b, \ +\frac{1}{2}b)$ albo w punkcie $(-\frac{1}{2}b, \ -\frac{1}{2}b)$, jeżeli zachodzi równość $(\frac{1}{2}b)^4 + (\frac{1}{2}b)^4 = a$, czyli $\frac{1}{8}b^4 = a$. — W przypadku, gdy $\frac{1}{8}b^4 > a$, prosta (2) nie przecina krzywej (1). — Wreszcie w przypadku, gdy $\frac{1}{8}b^4 < a$, prosta (2) przecina krzywą (1) w dwóch punktach, położonych symetrycznie względem osi $y = x$, t. zn. w takich dwóch punktach, że odcięta jednego z nich jest równa rzędnej drugiego i odwrotnie.

W przypadku, gdy $a = 0$, równaniu (1) odpowiada jedyny punkt (0, 0). Prosta (2) przechodzi przez ten punkt tylko pod warunkiem, że $b = 0$, i wtedy układ ma rozwiązanie ($x = 0$, $y = 0$).

Wreszcie w przypadku, gdy $a < 0$, niema punktów, odpowiadających równaniu (1).

A. M. R.

Nr. 84. *Równanie ze znakami bezwzględnej wartości.* Wyznaczyć zbiór punktów (x, y), określony przez równanie

$$|2y - x - 1| + |2x - y - 1| + |5 - x - y| - 3 = 0.$$

A. M. R.

Rozwiązanie. Zestawiając równanie

$$|2y - x - 1| + |2x - y - 1| + |5 - x - y| = 3.$$

z łatwo sprawdzalną tożsamością

$$(2y - x - 1) + (2x - y - 1) + (5 - x - y) = 3,$$

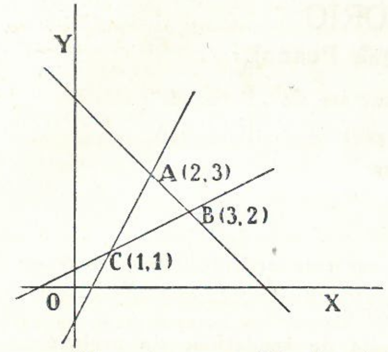
dochodzimy do wniosku, że wszystkie wielomiany (ujęte w nawiasy) muszą mieć wartości nieujemne:

(a) $2y - x - 1 \geqslant 0.$

(b) $2x - y - 1 \geqslant 0.$

(c) $5 - x - y \geqslant 0.$

Wyznaczmy na płaszczyźnie XOY zbiory punktów (x, y), które spełniają warunki (a), (b), (c).



Prosta BC odpowiada równaniu $2y - x - 1 = 0$, $y = {}^1/_2 x + {}^1/_2$. Wszystkie punkty, spełniające warunek (a), leżą bądź na prostej BC, bądź na tej półpłaszczyźnie, na której leży punkt A, gdyż w obu tych przypadkach i tylko w tych przypadkach zachodzi związek

$$y \geqslant {}^1/_2\, x + {}^1/_2.$$

Podobnie prosta CA odpowiada równaniu $2x - y - 1 = 0$. Punkty, spełniające warunek $y \leqslant 2x - 1$, leżą bądź na prostej CA, bądź po tej stronie, po której leży punkt B.

Wreszcie prosta AB odpowiada równaniu $5 - x - y = 0$. Punkty spełniające warunek $y \leqslant -x + 5$, leżą bądź na prostej AB, bądź po tej stronie, gdzie leży punkt C.

Aby wszystkie warunki (a), (b), (c) były spełnione, punkt (x, y) musi być wzięty z obwodu albo z wnętrza trójkąta ABC.

Józef Andruszkiw (Kęty).

ZADANIA.

ZADANIA O WIELOKĄTACH.

Nr. 197. — Wykazać, że każdy wielokąt posiada co najmniej trzy kąty mniejsze od kąta półpełnego. *S. S. (Warszawa).*

Za rozwiązanie 5 punktów.

Nr. 198. — Wyznaczyć, jaka może być największa liczba kątów ostrych w n-kącie, gdzie n jest daną liczby naturalnej, niemniejszą od 3. Podać metodę budowy takiego n-kąta, któryby miał największą możliwą liczbę kątów ostrych. *A. M. R.*

Za rozwiązanie 12 punktów.

Nr. 199. — Wyznaczyć, jaka może być największa liczba kątów ostrych w n-kącie *wypukłym*, gdzie n jest daną liczbą naturalną.

Za rozwiązanie 3 punkty. *A. M. R.*

ZADANIA Z RÓŻNYCH DZIAŁÓW.

Nr. 200. *Czworoboki skośne.* Dowieść, że dwa czworoboki skośne o bokach odpowiednio równoległych i jednakowo ułożonych są podobne.

Za rozwiązanie 5 punktów. *S. K. (Warszawa).*

Nr. 201. *Podzielność liczb.* Jeżeli p jest liczbą naturalną niepodzielną przez 5, to $p^8 + 3p^4 - 4$ jest podzielne przez 50.

Za rozwiązanie 4 punkty. *W. W. (Warszawa).*

Nr. 202. *Sumowanie szeregu.* Obliczyć sumę n wyrazów szeregu

$$2.1^2 + 3.2^2 + 4.3^2 + \ldots + (n+1).n^2.$$

Za rozwiązanie 4 punkty. *W. W. (Warszawa).*

Nr. 203. *Układ równań.* Rozwiązać i przedyskutować liczbę rozwiązań układu

$$x - ay + a^2z - a^3 = 0,$$
$$x - by + b^2z - b^3 = 0,$$
$$x - cy + c^2z - c^3 = 0.$$

Za pełne rozwiązanie 15 punktów. *(Baccalauréat).*

REPERTORIO
(scripto in lingua Peano)

Adressa: A. M. Rusiecki, Redactore de „Parametr"
VARSAVIA, ul. Koszykowa 31 — 5. POLONIA.

Fasciculo 4 — 5 de tomo 2 contine:

DISSERTATIONES.

D-na Dr. Ludovica Jeleńska praesenta articulo „*Enodatione de problemas*" quasi correspondente ad articulo „*Innodatione de problemas*", dato in fasciculo 1 de currente tomo.

Auctrice analyza psychologico facie de enodatione de problemas in modo synthetico et in modo analytico de solutione.

In *synthetico* modo de solutione de problema instructore interroga: „*Quale es primo quaestione?*" Et magistro cognosce „primo quaestione", nam illo cognosce „secundo quaestione, tertio quaestione",... et ita ad fine de solutione. Synthetico modo de solutione de problemas non respecta psychologia de discipulo.

In *analytico* modo de solutione de problema instructore interroga: „*Quale es ultimo quaestione?*" Tale interrogatione non facilita solutione de problema, si id non produce orientatione de discipulo ad *essentia de problema*. Instructore debe illumina *essentia* de problema per respectivo inductione de discipulos. Analytico modo de solutione de problemas es difficile pro instructore, si id debe es facilitatione pro discipulos.

Applicatione de analytico modo non es necessario. Si homo adopta methodo de „innodatione de problemas" (vide fasciculo 1), tunc principale momento de solutione es creatione de *formula pro solutione*. Disciрulos debe pergrede triplo itinere: conceptione de *re* — elocutione *verbale* — notificatione *symbolico*. Toto mente de discipulo debe es concentrato in ipso problema, — non in enumeratione, — inde libertate de mente, que permitte ad meliore inspectione de typo de problema.

D-na Dr. Romana Miller expone *quaestiones pro solutione ut problemas pro institutione*. Problemas mathematico, que nos solve in currente vita, non habe specie de problemas scholare: antea quam nos solve aliquo problema, nos debe *institue ipso problema* et *require datos sufficiente* pro solutione de problema. Schola debe instrue discipulos de cogitatione et de inquisitione de datos; habituale problemas scholare non tende ad ce fine.

D-no Stanislao Witeszczak describe *solutione de problemas per methodo de consultatione in gruppas*. Omne gruppa de discipulos inquire solutione de problema. Post aliquo tempore gruppas pronope suo projectus de solutione de problema; post critica de errores et electione de meliore projectu seque solutione de problema.

D-na Maria Szablewska praesenta hora scholare pro themа: „*Introductione in divisione, dato numero de partes*". — Auctrice distingue duo specie de divisione: divisione, dato *valore de partes*, et divisione, dato *numero de partes*. Distinctione de duo specie de divisione es indispensabile in instructione elementare.

D-no Ing. Leonida Chrzczonowicz delibera de necessitate de introductione de *grandores dimensionale in instructione de mathematica*. Arithmetica scholare cognosce *pondere* (kilogramma), *longore* (metro), *tempore* (hora, minuta, secunda), *valore oeconomico* (moneta), atque *area* (unitates quadratico) et *volumine* (unitates cubico). Calculos practico exigue etiam introductione de „novo" grandores, ut p. e. *celeritate* (cum unitates: kilometro pro hora et nodo navigationale), *labore* (kilogrammametro, kilowatthora, caloria) et *effectivitate* (horse-power, watt).

Calculo cum grandores dimensionale es plus evidente quam calculo per puro numeros. Introductione de grandores dimensionale es speciale necessario in scholas professionale.

D-no Dr. Stephano Straszewicz analyza *tres systema de conditiones necessario et sufficiente ut numeros a, b, c, A, B, C exprima respectivo lateres et angulos de triangulo*.

Auctore formuliza tres systema *irreductibile:* systema I (1—4), systema II (1—4) et systema III (1—4); vide ce systemas in paginas 96, 97 et 98. Ce systemas es *aequivalente*.

Citata ex Praefatione ad *Trigonometria Sphaerico* de Johannes Śniadecki (1817): *De necessitate de fundamentale cognitione de elementos de mathematica.*

D-no Dr. Antoni Hoborski delibera de *demonstratione apagogico in schola secundario*. Demonstratione „per reductione ad absurdo" es plus facile quam demonstratione directo, nam id indica puncto de initio.

Pro exemplo Auctore da demonstratione directo de duo theorema pro circulo de Feuerbach et demonstratione apagogico de theorema: *omne numero habe non plus quam uno logarithmo.*

Post ce introductione Auctore analyza structura logico de demonstratione apagogico. In fine Autore analyza quaestione: *an omne demonstratione apagogico es invertibile in demonstratione directo?* Ce quaestione non es soluto. Auctore puta, quod tale inversione es semper possibile.

BIBLIOGRAPHIA.

D-no Stephano Kulczycki praesenta ad polono publico novo libro pro amatores de mathematica: „*Von Zahlen und Figuren*" de H. Rademacher et O. Toeplitz.

D-no Vladislao Krasiński in vasto articulo praesenta methodo de individuale instructione de arithmetica secundo C. Washburne („*Individual Arithmetic*").

CHRONICA: II Congressu de Mathematicos Polono. — Cursus canicularе pro instructores de mathematica et physica in scholas elementare et secundario.

ANGULO SINE TITULO: *Quid es cambio?*

PROBLEMAS.

ANNEXU PRO JUVENES.

Nr. 4—5 de anno 1. contine:

Redactore A. M. Rusiecki da essentionale informationes de lingua Peano (in duo textu parallele).

D-no Dr. Eugenio Rybka solve problema de *recorde de plus durativo volatu diurnale inter limines de Republica Polonia* (problema dato de Redactore in fasciculo Nr. 5 de anno 1930). Aëronavigatore debe incipe start in die de solstitio aestivale) in extremo puncto *N. E. de* Polonia — apud flumine Dvina — et debe atterriza in ipso die in extremo puncto *N. W.* — apud mari Baltico. Toto volatu dura 18 hora 7 minuta. Nemine pote supera ce recorde.

D-no Stephano Kulczycki analyza *plus compacto dispositione de aequale sphaeras in spatio* et obtine unico tale dispositione: quando centros de proximo sphaeras, que continge aliquo sphaera, es dispositio in vertices de 14-edro semiregulare de Archimede, circumscripte in dato sphaera.

D-no Marco Katz, disciplulo de schola secundario, propone *modificatione de solutione de aequatione de tertio gradu.*

Sequente articulo da *uno extremale proprietate de triangulo* — secundo D-no L. Fejér.

ANGULO SINE TITULO: *Mensura in oculo.*

PROBLEMAS.

Traductione de epistola in problema *„Recorde non superabile"* dato in pagina 54 de annexu pro juvenes:

Caro Amico,

Redactore de „Parametr"!

Cum vivo gaudio me accipe Tuo propositione.

Me projecta initio de volatu in loco ■■■■■■■■ (in districtu ■■■■■■■■■ de palatinatu ■■■■■■■■■■■), sub ■■■■■■ de latitudine et ■■■■■■ de longitudine geographico, die ■■■■■■ de anno currente ad ■■ hora ■■ minuta — in momento de ortu de sole.

Per toto die me vola in aëre et me non transvola super limines de Republica Polonia.

Me atterriza in ipso die ad ■■ hora ■■ minuta in momento de occasu de sole in loco ■■■■■■ (in districtu ■■■■■■■■■■■ de palatinatu ■■■■■■■■■■■■■), sub■■■■■■de latitudine et ■■■■■■ de longitudine.

Toto volatu dura ■■ hora ■■ minuta. In ce modo me instaura, secundo Tuo conceptu, recorde de plus durativo volatu diurno in fines de Republica Polonia — de ortu ad occasu de sole. Nemo in futuro pote supera ce recorde.

Me jam fini ce epistola, quando veni ad meo mente idea to infunde omne dato per incausto. Ipso Redactore debe reconstrue ce datos aut advoca Lectores de „Parametr" ad succursu!

Vale et gaude!

(—) Jan Rawicz
aëronavigatore.

Dato in Varsavia, die 3 majo 1930.

Czcionkami Drukarni św. Wojciecha w Poznaniu.

ROK 1 *KWIECIEŃ — MAJ 1931* *NR. 4—5*

MŁODY MATEMATYK

CZASOPISMO DLA MŁODZIEŻY SZKOLNEJ
WYCHODZI POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO
PRZY WSPÓŁUDZIALE S. STRASZEWICZA.

ANTONI MARJAN RUSIECKI (Warszawa).

Lingua Peano.

W końcu każdego zeszytu czasopisma *Parametr* podajemy jego treść w języku międzynarodowym — *Lingua Peano.*

Czytelnicy częstokroć nas zapytywali, co to za język, tak łatwo zrozumiały, — czy to jest *Esperanto?*

Udzielamy odpowiedzi w dwóch tekstach równoległych: w języku *polskim* i w języku *Peano.*

Imperjum Rzymskie wśród bogatej spuścizny zostawiło skarb wielkiej wartości — język łaciński.

Łacina była językiem międzynarodowym przez całe średniowiecze, a w nauce dotrwała aż do wieku XIX jako język uczonych.

In fine de omne fasciculo de periodico *Parametr* nos da repertorio in lingua internationale — *Lingua Peano.*

Lectores interroga nos saepe, quid es ce lingua tam facile intelligibile, — an ce es *Esperanto?*

Nos communica responsu in duo textu parallele: in lingua *polono* et in lingua *Peano.*

Imperio Romano inter divite hereditate relinque thesauro de grave valore — lingua latino.

Latino es lingua internationale per toto medio aevo, et in scientia remane usque ad seculo XIX ut lingua de scientiatos.

W nowszych czasach zaczyna się przewaga francuszczyzny jako języka dyplomatycznego, jednak w traktacie wersalskim (1919) język francuski dzieli już ów przywilej z angielskim.

W miarę wygasania łaciny jako języka międzynarodowego uczeni i ludzie dobrej woli zajmowali się poszukiwaniem języka pomocniczego.

Wielu proponowało odrodzić łacinę klasyczną. Inni radzili przyjąć jeden z języków nowożytnych za język pomocniczy, np. angielski, francuski albo włoski.

Każdy z tych języków wymaga uczenia się gramatyki, a w szczególności składni. Znaczna trudność polega na swoistej frazeologji języków, która wymaga wieloletniego zżycia się z budową języka.

Wielu usiłowało stworzyć język sztuczny o prostej gramatyce i łatwem słowotwórstwie. Istnieje kilkaset projektów języka sztucznego.

W roku 1903 zostały ogłoszone rękopisy Leibniz'a (1646—1716), w których sławny autor podaje myśli o budowie języka pomocniczego: język ten winien przyjąć słownik łaciński z uproszczoną gramatyką.

Pod natchnieniem tych myśli znakomity uczony matematyk Prof. G. Peano zaczął ogłaszać swe rozprawy naukowe w języku *Latino sine flexione*. Język ten znany jest obecnie pod nazwą *Interlingua;* jednak wobec istnienia wielu innych prób

In novo tempore incipe praevalentia de français ut lingua diplomatico, tamen in tractatu de Versailles (1919) français jam divide ce privilegio cum english.

In modo de extinctione de latino ut lingua internationale scientiatos et homines de bono voluntate occupa se pro investigatione de lingua auxiliare.

Plure propone revivifica latino classico. Alios consilia accepta uno ex linguas moderno ut lingua auxiliare, p. e. english, français aut italiano.

Omne ce lingua exige studio de grammatica et speciale de syntaxi. Grave impedimento consiste in parculare phraseologia de linguas, que exige plure anno de accommodatione ad structura de lingua.

Plure tenta de crea lingua artificiale cum simplice grammatica et facile derivatione de vocabulos. Exsiste plure centum projectu de lingua artificiale.

In anno 1903 es publicato manuscriptos de Leibniz (1646—1716), in que famoso auctore expone ideas de structura de lingua auxiliare: ce lingua debe accepta vocabulario latino cum grammatica simplificato.

Sub inspiratione de ce ideas celebre scientiato mathematico Prof. G. Peano incipe de publica suo dissertationes scientifico in *Latino sine flexione*. Ce lingua es noto nunc sub nomine *Interlingua;* tamen per causa de exsistentia de plure

języka pomocniczego, słuszną jest nazwa *Lingua Peano* według nazwiska odkrywcy.

Zasady tego języka są genjalne w prostocie.
słownik — międzynarodowy,
pisownia — łacińska,
gramatyka — żadna.

alio proba de lingua auxiliare, digno es nomine *Lingua Peano* secundo nomine de inventore.

Principios de ce lingua es geniale in simplicitate:
vocabulario — internationale,
orthographia — latino,
grammatica — nullo.

Vocabulario.

Wyrazy międzynarodowe mają rozmaite pochodzenie.

Vocabulos internationale habe diverso origine.

Z języka arabskiego pochodzą: — Ex lingua arabo ori:

cofea, magazin, tara, tariffa, zenith, ciffra, algebra, ...

Z języka angielskiego: — Ex english:

dumping, budget, tramway, waggon, lift, club, tennis, sport, ...

Z języka włoskiego: — Ex italiano:

agio, bancarotta, cassa, finanza, valuta, firma, posta, ..

Podstawowy zapas wyrazów międzynarodowych pochodzi ze słowników łacińskiego i greckiego.

Copia fundamentale de vocabulos internationale ori ex vocabularios latino et graeco.

Prof. G. Peano opracował spis wyrazów łacińskich i greckich, które zyskały rozpowszechnienie międzynarodowe w postaci pierwiastków lub wyrazów pochodnych.

Prof. G. Peano elabora inventario de vocabulos latino et graeco, que obtine diffusione internationale in forma de radices vel vocabulos derivato.

Tak powstał słownik liczący 14 000 wyrazów. Dla sprawdzenia bada się istnienie tych wyrazów nietylko w językach pochodzenia romańskiego, ale również w języku angielskim.

Ita ori vocabulario que contine 14 000 vocabulo. Pro verificatione homo explora exsistentia de ce vocabulos non solo in linguas de origine romano, sed etiam in english.

Zaszła potrzeba utrzymania tylko 20 wyrazów łacińskich i greckich o mniejszem rozpowszechnieniu w językach współczesnych.

Exsta necessitate de retine solo 20 vocabulo latino et graeco cum minore diffusione in linguas moderno.

Dzięki takiej budowie słownika, tekst napisany w *Lingua Peano* jest łatwo zrozumiały dla każdego człowieka wykształconego.

Gratia ad tale constructione de vocabulario, textu scripto in *Lingua Peano* es facile intelligibile pro omne homine culto.

Orthographia.

Księga święta ma jednakową nazwę w różnych językach, ale niejednakową pisownię:

Libro sacro habe simile nomine in diverso linguas, tamen habe dissimile orthographia:

biblja (polono), *bibbia* (italiano), *bible* (français), *bibel* (teutico).

Lingua Peano przyjmuje pisownię łacińską, a więc — *biblia*.

Lingua Peano adopta orthographia latino, ergo — *biblia*.

Podobnie w przymiotnikach, np.

Simile in adjectivos, p. e.

psichico (ital.), *psychique* (franç.), *psychic* (engl.), *psychisch* (teut.), *psychico* (*Lingua Peano*).

Jednolitość pisowni nie jest sprawą podstawową: drobne zmiany nie powodują trudności w zrozumieniu, np.

Uniformitate de orthographia non es quaestione fundamentale: parvo modificationes non produce difficultate de interpretatione, p. e.

auctore (latino), *autore* (italiano), *author* (english), *ecstasi* (graeco), *extase* (français), *ekstaza* (polono).

Obawa „błędu" nie istnieje: w razie niepewności można pisać wedle własnego gustu, np.

Non exsiste timiditate de „errore": in casu de incertitudine homo scribe secundo proprio gustu:

exsistentia aut *existentia*, *lithographia* aut *litografia*, *charta* aut *carta*, *alcohol* aut *alcool*, *seculare* aut *saeculare*, *cifra* aut *ciffra* aut *ciphra* aut *cyphra*...

Grammatica.

Lingua Peano nie posiada gramatyki.

Lingua Peano non habe grammatica.

Każdy wyraz ma jedyną postać.

Omne vocabulo habe unico forma.

Nie istnieje odmiana przez przypadki: dla zaznaczenia stosunków między wyrazami używa się odpowiednich przyimków, np.

Non exsiste declinatione per casus: pro insignatione de relationes inter vocabulos homo ute correspondente praepositiones, p. e.

domo, *de domo*, *ad domo*, *per domo*, *in domo*, *ab domo*...

Dla zaznaczenia liczby mnogiej w imionach używa się końcówki *-s*, np.

Pro insignatione de numero plurale in nomines homo ute finale *-s*, p. e.

domo, *mappa*, *nocte*, *die*, *gradu*, *mare*, *verbo*, *thema*, *thesi*,
domos, *mappas*, *noctes*, *dies*, *gradus*, *mares*, *verbos*, *themas*, *thesis*.

Zaznaczanie liczby mnogiej po liczebniku jest zbędnem powtórzeniem, np.

Insignatione de plurale post numerale es repititione inutile, p. e.

septem die, *1852 metro*, *plure vocabulo*, *ambo oculo*.

Przymiotnik posiada zawsze jednakową postać bez rozróżnienia rodzaju i liczby, np.

Adjectivo habe semper identico forma sine distinctione de genere et numero, p. e.

Vita es unico, *formas es variabile*.

Czasownik ma jedyną postać bez rozróżnienia trybu, czasu i osoby, np.

Verbo habe unico forma sine distinctione de modo, tempore et persona, p. e.

es, *me es*, *te es*, *illo es*, *illa es*, *id es*, *nos es*, *vos es*, *illos es*, *illas es*, etc.

W razie konieczności zaznaczenia czasu daje się w tekście odpowiednią okoliczność, np.

In casu de necessitate de insignatione de tempore homo da in textu correspondente circumstantia, p. e.

Interlingua es utopia in praeterito, *realitate in futuro*.

Academia pro Interlingua.

W Turynie istnieje Akademja dla języka pomocniczego.

Każdy zwolennik idei pomocniczego języka międzynarodowego może być członkiem Akademji.

Składka członkowska wynosi 10 franków rocznie[1]).

Każdy członek Akademji otrzymuje czasopismo „*Schola et Vita*", organ Akademji.

In Torino exsiste Academia pro Interlingua.

Omne fautore de idea de lingua auxiliare internationale pote es socio de Academia.

Quota de socio es 10 fr per anno.

Omne socio de Academia recipe periodico „*Schola et Vita*", organo de Academia.

Prosimy Czytelników o zawiadomienie, czy artykuł o *Lingua Peano* wzbudził zainteresowanie.

Nos preca Lectores de mitte informatione, an articulo de *Lingua Peano* incita interesse.

---

[1]) Adres skarbnika Akademji — Adressa de Thesaurario de Academia: Ing. G. Canesi, Via Costigliole, 1. TORINO, 105. ITALIA.

Adres czasopisma Akademji — Adressa de periodico de Academia: „*Schola et Vita*". Via E. Pagliano, 46. MILANO, 137. ITALIA.

DR. EUGENJUSZ RYBKA (Warszawa).

Rekord długotrwałości lotu dziennego w granicach Rzeczypospolitej Polskiej.

W zeszycie Nr. 5 *Parametra* z roku 1930 ukazało się zaproponowane przez A. M. Rusieckiego zadanie konkursowe, zredagowane w postaci listu:

Drogi Przyjacielu,

Redaktorze „Parametra"!

Z żywą radością przyjmuję Twoją propozycję.

Zamierzam wystartować z miejscowości ■■■■■■■■■■ *w powiecie* ■■■■■■■■■■■ *województwa* ■■■■■■■■■■■ *pod szerokością geograficzną* ■■■■■■ *i długością* ■■■■■■ *dnia* ■■■■■■ *r. b. o godzinie* ■■ *min.* ■■ *w momencie wschodu słońca.*

Przez cały dzień będę się trzymał w powietrzu, nie przelatując ani razu poza granicę Rzeczypospolitej Polskiej.

Wyląduję tegoż dnia o godzinie ■■ *min.* ■■ *w momencie zachodu słońca w miejscowości* ■■■■■■ *w powiecie* ■■■■■■■■■■■■■ *województwa* ■■■■■■■■■■■■ *pod szerokością* ■■■■■■ *i długością* ■■■■■■.

Cały ten lot będzie trwał ■■ *godzin* ■■ *minut. W ten sposób ustalę, według Twego pomysłu, rekord najbardziej długotrwałego lotu dziennego w granicach Rzeczypospolitej Polskiej — od wschodu do zachodu słońca. Nikt w przyszłości nie będzie mógł tego rekordu pobić.*

Już kończyłem ten list, gdy przyszła mi do głowy myśl zalania atramentem wszystkich danych. Niech je sobie Redaktor sam odtworzy albo wezwie Czytelników „Parametra" do pomocy.

Bądź zdrów i wesół!

(—) Jan Rawicz
pilot

Dan w Warszawie, dnia 3 maja 1930.

Lotnik osiągnie rekord długotrwałości lotu dziennego w granicach Rzeczypospolitej Polskiej, jeżeli odbędzie lot w czasie najdłuższego dnia, a więc w dniu letniego stanowiska Słońca, przyczem winien wystartować w miejscowości, w której w dniu stanowiska letniego występuje w Rzeczypospolitej Polskiej, najwcześniej wschód Słońca, a wylądować w miejscowości, w której w tym samym dniu zachód Słońca wypada najpóźniej. Trasa lotu jest obojętna, byle tylko lotnik nie przekraczał granic Rzeczypospolitej i trzymał się przez cały czas w powietrzu. Prędkość samolotu jest zupełnie dostateczna, aby lotnik mógł w ciągu dnia letniego przelecieć od krańca do krańca Rzeczypospolitej.

Odstęp czasu od momentu startu do momentu lądowania da rekordowy czas najbardziej długotrwałego lotu dziennego w granicach Polski.

Rozwiązanie zapomocą globusa geograficznego.
(*W odniesieniu do środka Słońca i bez uwzględnienia refrakcji*).

W dniu stanowiska letniego deklinacja Słońca wynosi $+23{,}4^0$. W dniu tym miejscowości, położone na równoleżniku $+23{,}4^0$ (czyli na zwrotniku Raka), mają Słońce w zenicie. Jeżeli nie uwzględnimy refrakcji, to linją graniczną między dniem i nocą na kuli ziemskiej będzie wielkie koło, jakie otrzymamy, gdy wyznaczymy punkty odległe o łuk 90^0 od tego punktu, który ma Słońce w zenicie.

Wycinamy pasek papieru i zaznaczamy na nim końce odcinka o długości równej ćwierci obwodu globusa. Jeden koniec tego odcinka umiejscowimy szpilką w jakimkolwiek punkcie na zwrotniku Raka, a w drugim końcu odcinka umieścimy ołówek i zakreślimy nim na globusie wielkie koło, które będzie oddzielało oświetloną część globu ziemskiego od części nieoświetlonej.

Przesuwając środek oświetlonej półkuli po zwrotniku Raka, dobierzemy takie jego położenie, aby zachodni brzeg wielkiego koła, oddzielającego na kuli ziemskiej dzień od nocy, dotykał wschodniej granicy Rzeczypospolitej Polskiej, nigdzie nie przechodząc przez jej terytorjum. Osiągniemy to, umieszczając szpilkę w o punkcie szerokości geograficznej $+23{,}4^0$ i długości geograficznej $160^0 E.$[1]) Zetknięcie nastąpi w północno-wschodniej Wileńszczyźnie w powiecie brasławskim, w punkcie o szerokości $+56^0$ i długości $28^0 E$, — w tem miejscu, gdzie koryto Dźwiny wygina się na północ — wprost miasteczka Uście, koło Dryssy.

Różnica długości $160^0 - 28^0 = 132^0$ jest kątem godzinnym Słońca w chwili wschodu na północno-wschodniej granicy powiatu brasławskiego w dniu 22 czerwca. Kąt ten możemy otrzymać bezpośrednio w mierze czasowej, o ile globus zaopatrzony jest w tarczę czasową[2]). Kąt godzinny i długość geograficzną wyrażamy w mierze czasowej, pamiętając, że $15^0 = 1^h$, $1^0 = 4^m$; mamy więc $132^0 = 8{,}8^h$; $28^0 = 1{,}9^h$.

Słońce wzejdzie w wymienionej przed chwilą miejscowości o godzinie $12^h - 8{,}8^h = 3{,}2^h$ według czasu miejscowego, czyli o $2{,}3^h$ czasu środkowo-europejskiego. O tej więc porze nastąpić ma start lotnika.

Przesuwając dalej środek oświetlonej półkuli, po równoleżniku $+23{,}4^0$, znajdziemy, że wschodni brzeg jej opuści zachodnią granicę Rzeczypospolitej Polskiej w powiecie morskim — w miejscowości Dębek na brzegu Bałtyku, — w punkcie o długości $18^0 = 1{,}2^h$

[1]) Znak E oznacza: *na wschód od Greenwich.*

[2]) Sposób obliczania kątów godzinnych na globusie oraz cały szereg łatwych zadań astronomicznych wskazany został w broszurze autora p. t. *Ćwiczenia z globusem ziemskim w szkole średniej.* Lwów—Warszawa—Kraków. Wydawnictwo Zakładu Narod. im. Ossolińskich 1928. Str. 36.

na wschód od Greenwich i o szerokości geograficznej $+ 55^0$. Słońce w tym momencie znajdować się będzie w zenicie na zwrotniku Raka w punkcie o długości $112^0 = 7{,}5^h$ na zachód od Greenwich. Słońce przeto zajdzie w wspomnianej miejscowości powiatu morskiego o godzinie $12^h + 7{,}5^h + 1{,}2^h = 20{,}7^h$ czasu miejscowego, czyli o $20{,}5^h$ czasu środkowo-europejskiego, A więc lot trwać będzie 18,2 godziny.

Uwzględnienie refrakcji oraz odniesienie momentów wschodu i zachodu do górnej krawędzi Słońca.

Wschód i zachód Słońca odnosimy zwykle do górnej krawędzi Słońca, której deklinacja w dniu 22 czerwca wynosi $+ 23{,}7^0$. Wpływ refrakcji zaznacza się w ten sposób, że prawdziwa odległość zenitalna górnej krawędzi Słońca wynosi podczas wschodu i zachodu nie 90^0, ale $90{,}6^0$. W celu więc rozwiązania naszego zadania, przesuwamy koniec odcinka na szpilce po równoleżniku $+ 23{,}7^0$; długość odcinka powiększamy tak, aby stanowiła nie 90^0, ale $90{,}6^0$ wielkiego koła.

Rozwiązanie na mapie.

Przy rozwiązaniu dokładniejszem posiłkujemy się *Kalendarzem Astronomicznym Polskiego Towarzystwa Przyjaciół Astronomji*. Kalendarz ten zawiera momenty wschodu i zachodu górnej krawędzi Słońca na każdy dzień roku dla Warszawy z uwzględnieniem refrakcji, a na str. 26 mamy pomocniczą tablicę do obliczania tych momentów w innych miejscowościach w Polsce. Tablica zawiera poprawki, jakie należy po uwzględnieniu długości geograficznej dodać algebraicznie do chwili wschodu Słońca w Warszawie lub odjąć algebraicznie od chwili zachodu Słońca w Warszawie, aby otrzymać te daty dla innych miejscowości o znanych współrzędnych geograficznych. Długość geograficzna Warszawy względem Greenwich wynosi $1^h\ 24^m$ na wschód.

Z mapy widzimy, że najdalej na wschód wysuniętą częścią Polski jest północno-wschodnia Wileńszczyzna o długości geograficznej około $28^0 = 1^h\ 52^m$ na wschód od Greenwich, czyli o 28^m na wschód od Warszawy; szerokość geograficzna tej najdalej na wschód wysuniętej części Polski położona jest między 55^0 i 56^0.

W szerokości geograficznej 55^0 Słońce wschodzi 22 czerwca o $18^m + \Delta\lambda$ wcześniej, niż w Warszawie, gdzie $\Delta\lambda$ jest różnicą długości geograficznej danej miejscowości w stosunku do długości Warszawy, a 18^m — jest to wzięta ze str. 26 *kalendarza* poprawka na różnicę szerokości geograficznych. Np. w punkcie o współrzędnych $\lambda = 1^h\ 52^m\ E$, $\varphi = + 55^0$, Słońce wschodzi 22 czerwca o $28^m + 18^m = 46^m$ wcześniej niż w Warszawie.

W celu rozwiązania naszego zadania znajdujemy na południkach $1^h\ 48^m\ E$, $1^h\ 52^m\ E$ i $1^h\ 56^m\ E$ punkty, w których Słońce

wschodzi o 47^m, 48^m, 49^m, 50^m, 51^m i 52^m wcześniej, niż w Warszawie. Odpowiednie dane interpolujemy z tablicy na str. 26 *Kalendarza Astronomicznego P. T. P. A.* na r. 1931. W załączonej tabelce podane zostały szerokości geograficzne, dla których na południkach o długości geograficznej λ Słońce wschodzi o T minut wcześniej, niż w Warszawie.

Tablica 1.

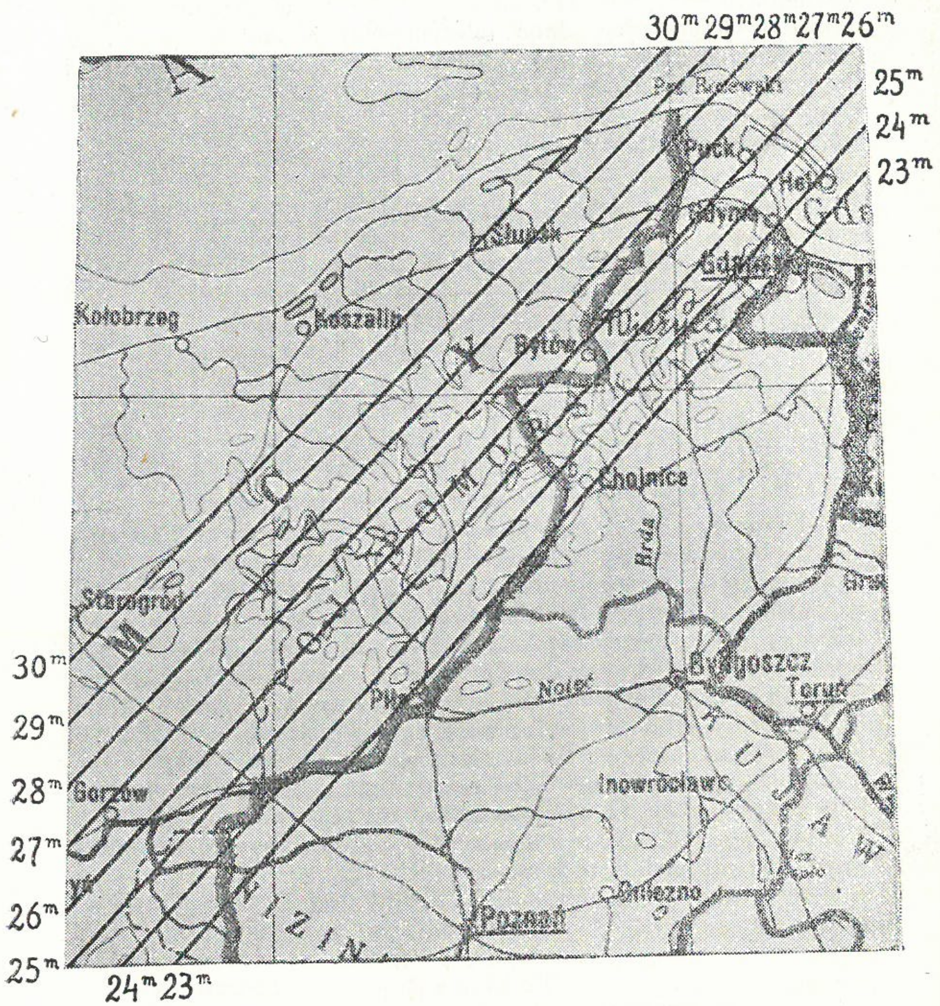
T \ λ	$1^h\ 48^m$	$1^h\ 52^m$	$1^h\ 56^m$
47^m	$+ 55^0 43'$	$+ 55^0 09'$	$+ 54^0 34'$
48	55 51	55 17	54 43
49	56 00	55 26	54 51
50	56 09	55 34	55 00
51	56 17	55 43	55 09
52	56 26	55 51	55 17

Kreśląc na mapie na podstawie danych z tablicy 1 linje momentu jednoczesnego wschodu Słońca, znajdujemy, że najwcześniej w Rzeczypospolitej Polskiej Słońce wschodzi 22 czerwca w powiecie brasławskim województwa wileńskiego — w miejscowości o współrzędnych $\lambda = 1^h\ 51{,}4^m\ E$, $\varphi = + 55^0 50'$, t. j. na lewym brzegu Dźwiny wprost Uścia (niedaleko od Dryssy). Słońce wzejdzie tam o 51^m wcześniej niż w Warszawie, czyli o godzinie $2^h\ 23^m$ czasu środkowo-europejskiego. Zwrócić należy uwagę, że najwcześniejszy wschód Słońca w dniu 22 czerwca następuje nie w najdalej na wschód wysuniętej części Polski (okolice Orzechowna koło Dzisny), lecz na północo-zachód od tego miejsca. Wschód Słońca dnia 22 czerwca następuje pod Uściem o 1 minutę wcześniej, niż pod Orzechownem.

Tym samym sposobem, co dla wschodu Słońca, obliczamy odpowiednią tabelkę dla zachodu Słońca.

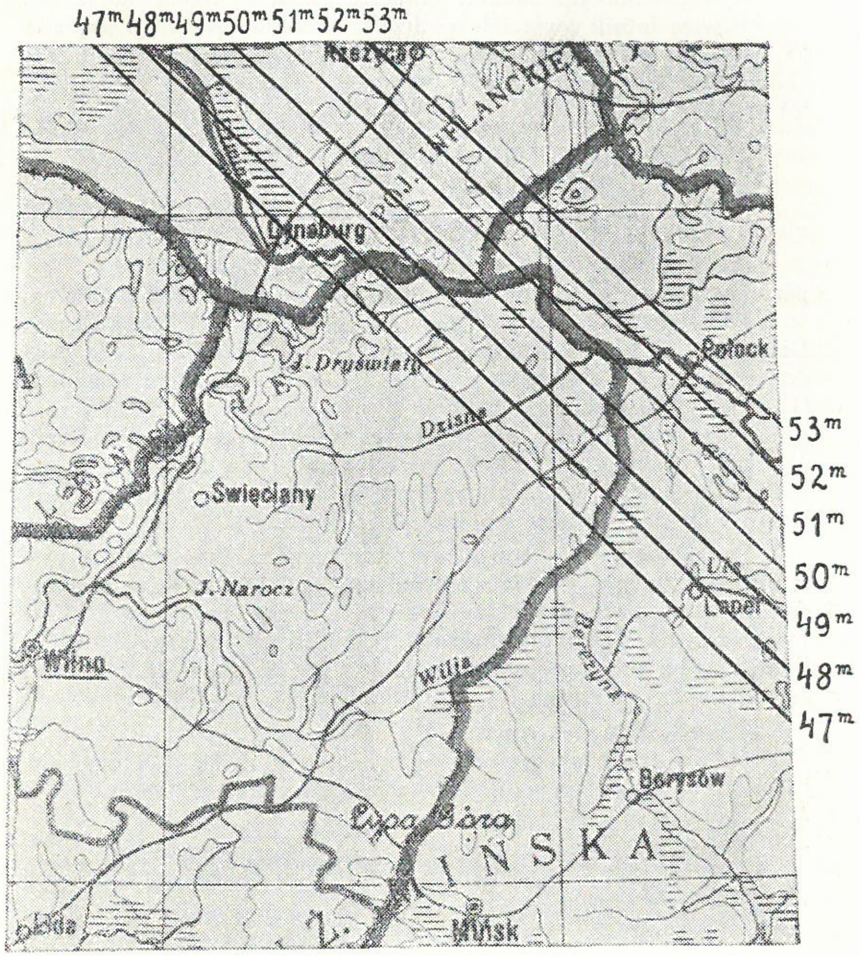
Tablica 2.

T \ λ	$1^h\ 08^m$	$1^h\ 12^m$	$1^h\ 16^m$
25^m	$+ 53^0 40'$	$+ 54^0 17'$	$+ 54^0 51'$
26	53 50	54 26	55 00
27	54 00	54 34	55 09
28	54 09	54 43	55 17
29	54 17	54 51	55 26
30	54 26	55 00	55 34



Mapka do wyznaczenia miejsca lądowania.

Rzut oka na mapę Polski odrazu nas doprowadzi do wniosku, że Słońce później zajdzie w północno-zachodniej części powiatu morskiego, niż w najdalszych zachodnich kresach woj. poznańskiego. Kreśląc linje jednoczesnego zachodu Słońca, znajdujemy, że na terenie Rzeczypospolitej Polskiej Słońce zajdzie w dniu 22 czerwca najpóźniej na wybrzeżu morskiem na północno-zachodniej granicy z Niemcami. Współrzędne tej miejscowości są: $\lambda = 1^h\ 12{,}3^m E$, $\varphi = +54^\circ 45'$. Zachód Słońca nastąpi tam



Mapka do wyznaczenia miejsca startu.

o 29 minut później niż w Warszawie, t. j. o godzinie $20^h 30^m$ czasu środkowo-europejskiego.

Ponieważ start ma nastąpić o godzinie $2^h 23^m$, a lądowanie o godzinie $20^h 30^m$, więc najdłuższy lot dzienny lotnika nad terytorjum Rzeczypospolitej Polskiej trwać może $18^h 7^m$.

W najdalej wysuniętej na zachód części Polski — w miejscowości Sowia Góra pod Międzychodem — zachód Słońca, jak widać z mapy, wypadnie 22 czerwca o 6 minut wcześniej, niż we wspomnianym punkcie granicznym na wybrzeżu morskiem. Gdyby więc lotnik wyleciał w chwili wschodu Słońca z najdalej na wschód wysuniętej miejscowości, a wylądował w chwili zachodu Słońca w miejscowości wysuniętej najdalej na zachód, to lot trwałby tylko $18^h 0^m$, — i rekord nie byłby osiągnięty.

Kontrola rachunkowa.

Wschód lub zachód górnej krawędzi Słońca przy uwzględnieniu refrakcji obliczyć możemy z następującego wzoru[3]):

$$(1) \qquad \cos t = -(0{\cdot}0145 \sec\delta \sec\varphi + \operatorname{tg}\delta \operatorname{tg}\varphi),$$

gdzie t oznacza kąt godzinny Słońca, δ — deklinację Słońca, w chwili wschodu lub zachodu, φ — szerokość geograficzną. Deklinacja δ dla 22 czerwca wynosi $+23^0 27'$. Szerokość geograficzna miejsca startu $\varphi = +55^0 50'$. — Rozwiązując równanie (1) dla tych wartości, znajdujemy w miejscu startu wartość $t = 8^h\ 47{,}5^m$. A więc Słońce wzejdzie tam o godzinie $12_h - 8^h\ 47{,}5^m = 3^h\ 12{,}5^m$; uwzględniając zaś równanie czasu i długość geograficzną, otrzymamy na moment wschodu Słońca wartość $2^h\ 22{,}6^m$ czasu środkowo-europejskiego.

Podstawiając następnie szerokość geograficzną miejsca wylądowania $\varphi = +54^0 45'$, znajdujemy ze wzoru (1), że kąt godzinny Słońca w chwili zachodu równa się tam $8^h\ 39{,}5^m$. Po uwzględnieniu równania czasu i długości geograficznej, zachód Słońca w tej miejscowości wypadnie o godzinie $20^h\ 28{,}9^m$ czasu środkowo-europejskiego.

Długość lotu jest równa $20^h\ 28{,}9^m - 2^h\ 22{,}6^m = 18^h\ 6{,}3$ Poprzednio uzyskany metodą graficzną czas $18\ 7^m$ był dość dobrem przybliżeniem czasu, uzyskanego rachunkiem, mianowicie $18^h\ 6{,}3^m$.

[3]) Patrz: M. P. Rudzki, *Astronomja Teoretyczna*, tom I, str. 108 (Kraków, 1914).

Zadanie konkursowe Nr. 1. wzbudziło zainteresowanie. Niestety, nie wszystkie nadesłane rozwiązania były poprawne.

Redakcja uprosiła Dr. E. Rybkę dać rozwiązanie z uwzględnieniem deklinacji Słońca, o czem zapominano przy rozwiązywaniu zadania. Sami uczestnicy konkursu zechcą uznać, że Autorowi należy się pierwsza nagroda.

Te same wyniki nieco innemi metodami otrzymali pp. Bielecki (Warszawa) i M. Hornowski (Warszawa) — obaj poza konkursem.

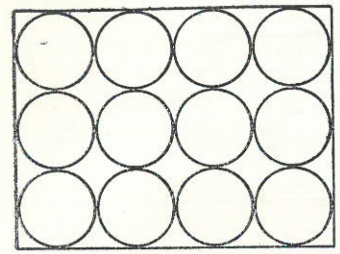
Druga nagroda, zastrzeżona *dla młodzieży szkolnej*, nie może być przyznana i musi zaczekać na inną sposobność.

Nagrody pocieszenia otrzymają pp. *Edward Bem (Prużana), Alfons Kobiak (Plisa, pow. dzisieński), Józef Poklewski-Koziełł (Wilno), Stefan Padjas (Szczebrzeszyn).*

STEFAN KULCZYCKI (Warszawa).

O najszczelniejszem rozmieszczeniu równych kul w przestrzeni.

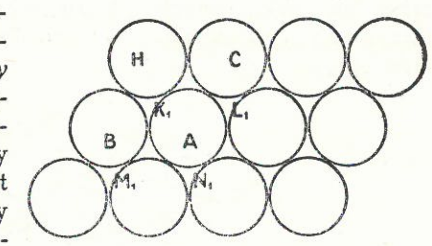
1. Jak ułożyć jabłka w skrzynce, aby najlepiej wyzyskać miejsce, t. j. aby jak największą objętość zajęły jabłka, a jak najmniejszą puste między niemi odstępy? Odpowiedź wymaga głębszego zbadania. Możnaby np. dno wypełnić, jak wskazuje rys. 1, drugą warstwę ułożyć w ten sam sposób — jabłko nad jabłkiem. Prosty rachunek wykaże, że wówczas tylko $\frac{1}{6}\pi = 0{,}52\ldots$ objętości skrzynki zajmą jabłka, niewiele zatem ponad jej połowę.



(Rys. 1)

Praktyczniej byłoby umieszczać jabłka drugiej warstwy w zagłębienia między jabłkami pierwszej. Mogłyby również jabłka na dnie leżeć, jak na rys. 2, a każde jabłko górnej warstwy dotykać trzech jabłek dolnej; przychodzi nawet myśl, czyby nie opłaciło się układać jabłek na dnie nie przy sobie, — odstępy między niemi byłyby większe, i jabłka drugiego piętra głębiejby w nie wpadały.

Który z tych sposobów jest najlepszy? Aby nie rozpatrywać kształtu samej skrzynki, sformułujemy zadanie w następujący sposób: *jak należy ułożyć równe kule, aby jak najszczelniej wypełnić niemi przestrzeń?* — t. j. wyobrazimy sobie, że ilość tych kul jest nieskończona, i zastanowimy się, jak winny być rozmieszczone ich środki. Kwestją tą zajmował się niemiecki matematyk H. Minkowski[*]) i pokazał, że wiążą się z nią liczne zagadnienia, odnoszące się do pewnych własności liczb całkowitych, które bada t. zw. *teorja liczb.*



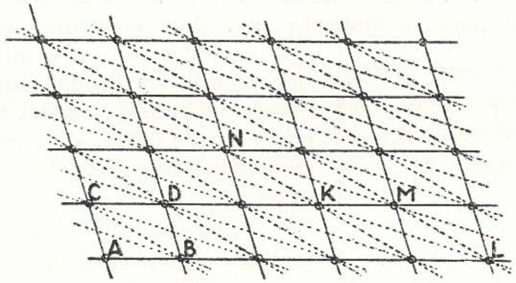
(Rys. 2)

2. Kule mogłyby, rzecz prosta, być pomieszane ze sobą bezładnie, ot — jak owoce w worku, my atoli przyjmiemy, że ułożone są warstwami, jedna nad drugą w stałej odległości, w każdej zaś warstwie kule leżą rzędami, — innemi słowy, środki tych kul są węzłami sieci, utworzonej przez 2 układy

[1]) *„Diophantische Approximationen"*, str. 101 — 111. Metoda H. Minkowskiego jest zresztą odmienna, mniej elementarna.

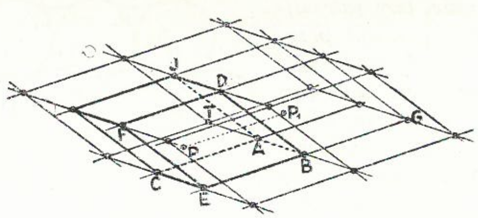
prostych równoległych, poprowadzonych w równych odpowiednio od siebie odległościach.

Te same punkty mogą być węzłami różnych sieci; na rysunku 3 widzimy dwie sieci, posiadające te same węzły: jedną narysowaną linjami ciągłemi, drugą — kropkowanemi. Najprościej przedstawimy taką sieć, konstruując jeden z równoległoboków przez nią utworzonych, np. $ABCD$ lub $KLMN$.



(Rys. 3)

Zwracając się ku środkom wszystkich kul w przestrzeni, przyjmiemy analogicznie, że *kule leżą w węzłach sieci, utworzonej przez trzy układy płaszczyzn równoległych i równooddalonych* (rys. 4). Najprościej przedstawimy sieć, budując jeden z równoległościanów przez nie utworzonych. Nazwijmy go *jednostkowym*. Całą sieć otrzymamy, ustawiając w sposób oczywisty równoległościany jednostkowe.



(Rys. 4)

Wypowiemy t w i e r d z e n i e, będące natychmiastową konsekwencją własności płaszczyzn równoległych:

Jeżeli ABC są węzłami sieci, a CD jest równoległe i równe AB, to i D jest węzłem sieci.

3. Przestrzeń będzie wypełniona przez układ równoległościanów jednostkowych, których wierzchołki są środkami kul. Podporządkowując każdemu z równoległościanów kulę — tę np., której środkiem jest dolny — prawy — przedni wierzchołek, zauważymy, że każdemu z rownoległościanów odpowiada jednatylko kula — i odwrotnie.

Stosunek objętości kuli do objętości równoległościanu dębzei dla nas miarą, jaką część przestrzeni wypełniają kule.

Definicja ta wymaga uzupełnienia. Widzieliśmy, że te same węzły można otrzymać z rozmaitych sieci. Równoległościanów „jednostkowych" może być więcej. O którym z nich mowa w powyższej definicji? Otóż, jest to obojętne, objętość ta jest bowiem dla nich wszystkich taka sama. Wypływa to z twierdzenia:

Niech x oznacza zmienną krawędź sześcianów, mających stały środek O i krawędzi równoległe do danych 3 prostych, y zaś — ilość węzłów sieci, zawartych wewnątrz sześcianu, v — objętość równoległościanu jednostkowego; mamy

$$v = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{y}$$

Ilość równoległościanów jednostkowych, zawartych całkowicie w sześcianie o krawędzi x, jest oczywiście mniejsza od y. Stąd

$$v > \frac{x^3}{y}$$

Niech k będzie większe od największej przekątnej równoległościanu. Weźmy pod uwagę sześcian o krawędzi $x + 2k$. Równoległościan sieci, którego prawym — dolnym — przednim wierzchołkiem jest dowolny z pośród y węzłów, przed chwilą rozpatrywanych, będzie zawarty jeszcze całkowicie w tym nowym większym sześcianie, albowiem wszelki punkt zewnętrzny tego większego sześcianu jest już odległy od każdego punktu mniejszego sześcianu więcej, niż o k. Równoległościanów mamy y; co najwyżej wypełniają one większy sześcian, zatem

$$y \cdot v < (x + 2k)^3$$

Razem więc
$$1 < v \cdot \frac{y}{x^3} < \frac{(x + 2k)^3}{x^3}$$

Lecz
$$\frac{(x + 2k)^3}{x^3} \longrightarrow 1, \text{ gdy } x \longrightarrow \infty.$$

Zatem
$$\lim_{x \to \infty} v \cdot \frac{y}{x^3} = 1.$$

Stąd
$$v = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{y},$$

czego należało dowieść.

Objętość każdego z równoległościanów jednostkowych jest równa tej samej granicy, a zatem nie zależy od tego, który z nich rozważamy.

4. Z pośród rozmaitych równoległościanów jednostkowych, dających te same węzły, wybierzemy obecnie pewien bliżej określony.

Pomyślmy pewną sieć. Niech A będzie jej dowolnym punktem. Najbliższy do A węzeł sieci (lub jeden z najbliższych, jeśli jest ich kilka o równych od A odległościach) nazwijmy B. Zkolei C niech oznacza węzeł najbliższy do A z pośród tych, które nie leżą na prostej AB. Wreszcie niech D będzie węzłem najbliższym do A z pośród tych, które nie leżą na płaszczyźnie ABC (rys. 4).

Odcinki $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ $(a \leqslant b \leqslant c)$ — tego oznaczenia trzymać się będziemy w dalszym ciągu — są krawędziami pewnego równoległościanu, którego i pozostałe wierzchołki są węzłami sieci na mocy twierdzenia ustępu 2. Pokażemy obecnie, że ani wewnątrz niego, ani na jego powierzchni niema innych punktów sieci, i wyciągniemy stąd wniosek, że skonstruowany równoległościan jest „jednostkowym". Oprzemy się na paru twierdzeniach pomocniczych.

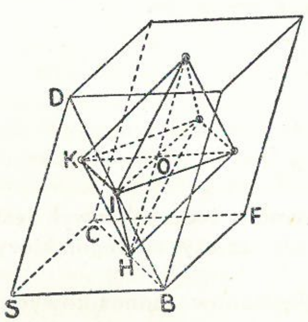
Lemmat 1. *Niech $SABC$ będzie czworościanem. S_1 — punktem jego wewnętrznym lub leżącym na powierzchni. Wówczas jeden przynajmniej z odcinków S_1A, S_1B, S_1C jest mniejszy od jednego z odcinków SA, SB, SC.*

Lemmat 2. *Jedna z przekątnych równoległościanu o krawędziach a, b, c jest niewiększa od $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, tem bardziej więc mniejsza od $2c$.*

Dowody pozostawiamy Czytelnikowi.

Lemmat 3. *Niech P oznacza dowolny punkt wewnątrz lub na powierzchni równoległościanu. Z ośmiu odległości punktu P od wierzchołków równoległościanu jedna przynajmniej jest mniejsza od najdłuższej krawędzi.*

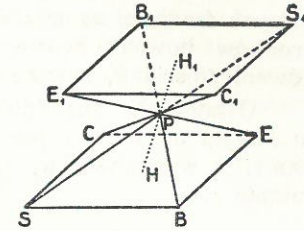
Poprowadźmy płaszczyznę BCD (rys. 5). Jeżeli P jest punktem czworościanu $SBCD$, twierdzenie jest prawdziwe na mocy lemmatu 1. Wątpliwość zachodzić może tylko dla punktów, które nie leżą w czworościanie $SBCD$, ani w żadnym z siedmiu innych czworościanów, dających się w ten sam sposób zbudować przy pozostałych wierzchołkach równoległościanu. Zbiór tych punktów jest ośmiościanem, którego wierzchołkami są środki ścian równoległościanu.



(Rys. 5)

Niech P będzie punktem wewnętrznym ośmiościanu, np. leżącym wewnątrz ostrosłupa $OHIK$ (O — środek równoległościanu). Odcinki OH, OI, OK są równe połowom krawędzi równoległościanu. Stosując do czworościanu $OHIK$ i punktu jego P lemmat 1, otrzymamy wniosek, iż jeden z odcinków PI, PH, PK, np. PH, jest mniejszy od $\frac{1}{2}c$. Weźmy pod uwagę równoległobok $SBCE$ (rys. 6) i zbudujmy figurę $S_1B_1C_1E_1$ symetryczną do niego względem punktu, jako środka.

$SBCES_1B_1C_1E_1$ jest równoległościanem o krawędziach SB, BE i $SE_1 = 2PH$ (wszystkie 3 niewiększe od c). Przekątnemi tego równoległościanu są odcinki równe $2PS$, $2PB$, $2PE$, $2PC$. Stosując do niego lemmat 2, przekonamy się, że jedna z przekątnych, np. $2PS$, jest mniejsza od $2c$. Stąd $PS < c$, a tego właśnie należało dowieść. Lemmat 3 jest zatem prawdziwy.



(Rys. 6)

Wracamy do twierdzenia, wysłowionego na początku ustępu. Jeśliby w równoległościanie, o którym tam była mowa, istniał punkt sieci P, to odległość jego (lemmat 3) od jednego z wierzchołków, np. od C (rys. 4), byłaby mniejsza od c. Z twierdzenia ustępu 2 wypływa, że węzłem jest również punkt P_1 taki, że PP_1 jest równe i równoległe do CA. Ale w takim razie $AP_1 = CP$ i jest mniejsze od c. To zaś jest niemożliwe, ponieważ z założenia $AD = c$ jest mniejsze od wszystkich odcinków, łączących punkt A z punktami sieci. Argumentacja nie ma zastosowania, gdy P leży na $ABCE$. Małą modyfikację, jaką wtedy trzeba wprowadzić, zostawiamy Czytelnikowi.

Ostatecznie, wewnątrz skonstruowanego równoległościanu niema węzłów sieci, jest on jednostkowym. W dalszym ciągu równoległościany, jakich nam ta konstrukcja dostarcza, nazywać będziemy równoległościanami R.

5. Chcemy wyszukać taką sieć, aby kule, których środkami są węzły, zajmowały jak największą objętość. Dokładniej formułując, chcemy znaleźć sieć taką, żeby stosunek objętości kuli o zadanym promieniu r do równoległościanu jednostkowego był jak największy, czyli żeby objętość tego równoległościanu była jak najmniejsza. Możemy się w tem badaniu ograniczyć do rozważania równoległościanów R.

Twierdzenie (rys. 4). *Przekątne podstawy $ABEC$ są niemniejsze, niż b, przekątne pozostałych ścian i przekątne równoległościanu są niemniejsze, niż c.*

Prawdziwość pierwszego zdania wynika stąd, iż $AC = b$ jest krótsze od odległości punktu A od innych węzłów sieci, a więc

$$AC \leqslant AE,$$
$$AC \leqslant AG.$$

Lecz AE i AG są równe przekątnym równoległoboku $ABEC$. — Prawdziwość drugiej części twierdzenia okażemy podobnie.

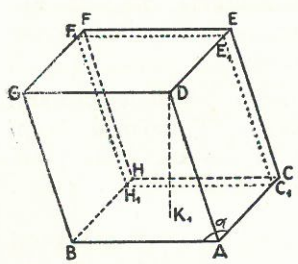
Jeśli dla równoległościanu R pewnej sieci $a \geqslant 2r$, to kule, których środkami są węzły sieci, nie mogą się przecinać, odległość środków bowiem będzie równa bądź przekątnej, bądź krawędzi równoległościanu, zawsze więc $\geqslant 2r$.

Ostatecznie zagadnienie brzmi: *znaleźć równoległościan R, w którym $a \geqslant 2r$, o jak najmniejszej objętości.* Gdy go wyszukamy, z wierzchołków, jako ze środków, opiszemy kule o promieniu r.

6. Powiadam zkolei: *Jeśli pewien równoległościan R ma objętość minimum, to $a = b = c = 2r$.*

Jeżeli $c \geqslant b \geqslant a > 2r$, to równoległościan podobny do danego, ale zmiejszony w stosunku $2r : a$, będzie miał: 1° najmniejszą krawędź równą $2r$, 2° objętość mniejszą od danego; ów równoległościan nie może przeto być najmniejszy.

Przyjmijmy, iż $AB = a = 2r$, ale $b = AC > a$ (rys. 7). Równoległościan taki nie może być najmniejszym, jeżeli bowiem zmniejszać będziemy wszystkie odcinki sieci równoległe do AC w tym samym stosunku, nie poruszając węzłów płaszczyzny $ABGD$, t. j. zastąpimy węzły C, E, F, H przez C_1, E_1, . . . i t. d., to otrzymać musimy sieć taką, iż najbliższy do A prostej (nie na AB) punkt będzie od A oddalony o r. Równoległościan R tej sieci będzie mieć dwie krawędzi (nierównoległe) równe $2r$, z drugiej zaś strony twierdzenie ustępu 3 pozwoli łatwo dowieść, iż jego objętość mniejszą będzie od objętości danego początkowo równoległościanu $ABCHGDEF$, ten więc nie może być najmniejszym.



(Rys. 7)

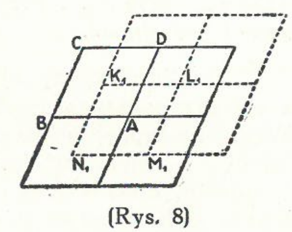
To samo rozumowanie pokaże, że w najmniejszym równoległościanie R krawędź c nie może być większa od pozostałych. Wszystkie trzy krawędzi w równoległościanie najmniejszym muszą być sobie równe, czego należało dowieść.

8. Objętość równoległościanu o krawędziach równych $2r$ i kącie rombu podstawy α (rys. 7) jest

$$V = 2r \cdot 2r \cdot \sin\alpha \cdot DK_1.$$

Takich równoległościanów, mających *tę samą* podstawę, jest wiele. Najmniejszą objętość ma ten z nich, którego wysokość jest najmniejsza, lub — jak też można powiedzieć — ten, dla którego rzut krawędzi bocznej na podstawę jest największy możliwy.

Rozważajmy (rys. 8) sieć węzłów podstawy $ABCD$ i rzuty na tę podstawę węzłów podstawy górnej: K, L, M, N. Jedna narysowana linją ciągłą, druga — przerywaną. Rzutem krawędzi bocznej AK, wychodzącej z A, będzie jeden z odcinków AK_1, AL_1, AM_1, AN_1, a mianowicie najkrótszy z nich, ponieważ AK jest najkrótszym z odcinków, łączących A z węzłami sieci górnej podstawy. Ale $AL_1 = BC_1$, $AM_1 = CK_1$, $AN_1 = DK_1$, celem więc wyszukania takiego położenia krawędzi bocznej AK, aby jej rzut był największy możliwy, winniśmy w rombie $ABCD$ znaleźć punkt K_1, którego odległość od najbliższego mu wierzchołka rombu byłaby *maximum.*



(Rys. 8)

Czytelnik sam dowiedzie twierdzenia:

Punktem rombu, którego odległość od najbliższego mu wierzchołka jest największa, jest środek koła opisanego na trójkącie, na jaki romb dzieli mniejsza przekątna.

Przyjmując, że K_1 (rys. 7) jest takim punktem, otrzymamy z trójkąta ABH:

$$AK_1 = \frac{2r}{2\sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{r}{\sin\frac{1}{2}\alpha} \quad (\textit{twierdzenie sinusów}).$$

Dalej z $\triangle ADK$:

$$DK_1 = \sqrt{4r^2 - \frac{r^2}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}} \quad (\textit{tw. Pitagorasa}) \text{ i}$$

wreszcie

$$V = 4r^3 \sin\alpha \sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2\frac{1}{2}\alpha}} = 8r^3\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sqrt{4\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - 1}.$$

9. Widzimy, że objętość równoległościanu jest funkcją zmiennej α. Nazwijmy

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = u;$$

mamy $$V = 8r^3\sqrt{-1 + 5u - 4u^2}.$$

Kąt α nie jest kątem ostrym, bo BC jest większą przekątną. Z drugiej strony, z metody konstrukcji równoległościanu R wpływa (rys. 8):

$$AB + BC \leqslant AC,$$

a stąd kąt $BAC = \frac{1}{2}\alpha$ jest mniejszym kątem $\triangle ABC$, czyli $\frac{1}{2}\alpha \leqslant 60^0$.

Wartość u jest zawarta między $\sin^2 45^0$ i $\sin^2 60^0$, a więc

$$\tfrac{1}{2} \leqslant u \leqslant \tfrac{3}{4}.$$

Trojmian $-1 + 5u - 4u^2$ osiąga *maximum* dla $u = \frac{5}{8}$; wartości zaś najmniejsze — na krańcach przedziału, w którym pozostaje u, t. zn. dla $u = \frac{1}{2}$ i $u = \frac{3}{4}$. Te wartości są jednakowe i równe $\frac{1}{2}$. W obu przypadkach objętość równoległościanu wynosi $8r^3\sqrt{\frac{1}{2}}$ — i taka jest *objętość najmniejsza równoległościanu jednostkowego* sieci nie przecinających się kul o promieniu r.

Stosunek objętości kuli do objętości równoległościanu wynosi $\frac{1}{6}\pi\sqrt{2} = 0{,}74\ldots$ *Przy najgęstszem rozmieszczeniu kul zajmują one* $\frac{1}{6}\pi\sqrt{2}$ *przestrzeni.*

10. Przyjrzyjmy się bliżej sieciom znalezionym. W pierwszym przypadku ($\alpha = 90^0$) w podstawie mamy sieć *kwadratową.* Węzły następnej płaszczyzny leżą nad środkami tych kwadratów, każdy z nich jest zatem równooddalony od 4 wierzchołków kwadratu, niżej leżącego, np. (rys. 4) $DA = DB = DE = DC = 2r$. Każda kula warstwy górnej styczna jest do czterech kul warstwy dolnej, które też są do siebie styczne.

W drugim przypadku mamy sieć *rombów* o kącie 120^0, lub — można powiedzieć — sieć *trójkątów równobocznych,* każdy z rombów bowiem dzieli się na dwa takie trójkąty. Węzeł sieci np. punkt D (rys. 7), leży na prostopadłej do płaszczyzny ABH, wzniesionej w środku trójkąta równobocznego ABH. Stąd $DA = DB = DH = 2r$. Kula, której środkiem jest D, jest styczna do kul o środkach A, B, H. Otrzymujemy w dolnej płaszczyźnie rozkład kul, jak na rys. 2; punkty K_1, L_1, N_1, M_1 są rzutami środków kul płaszczyzny górnej, z których każda styczna jest do trzech kul dalszych.

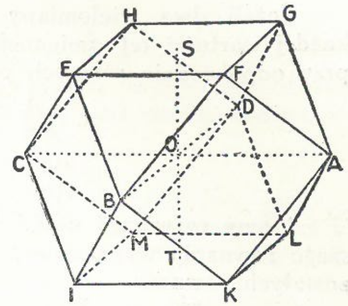
Niespodzianką będzie tu odkrycie, że *obie znalezione sieci są identyczne,* że zatem oba równoległościany dostarczają tej samej sieci.

Istotnie, niech rys. 4 wyobraża pierwszą z naszych sieci. Mówiliśmy już, że $DA = DB = DH$, trójkąt DAB jest równoboczny, a $DABI$ jest rombem o kącie 120^0. Tak jak D jest równooddalone od A, B, E, C, tak I równoodległe od A, C i I. Zatem

$$DC = 2r = IC = AC.$$

Punkt C leży w odległości $2r$ od wierzchołków ABH. A zatem równoległościan o podstawie $ABDI$ i krawędzi bocznej DC jest identyczny z drugim z pośród równoległościanów przez nas znalezionych. Ten więc daje tę samą sieć.

Każda kula O jest styczna do *dwunastu* kul. Środki ich tworzą figurę, przedstawioną na rys. 9. Są nimi punkty: $A_1B_1C_1D_1$ $O_1F_1G_1H_1I_1K_1L_1M$. Mamy przytem $OA = OB = OC = OD = 2r$, $ES = r\sqrt{2}$. Linjami ciągłemi i kreskowanemi połączono środki tych kul, które są do siebie styczne. Te linje są krawędziami wielościanu, ograniczonego przez 6 kwadratów i 8 trójkątów. Wszystkie te krawędzi są sobie równe.



(Rys. 9)

MAREK KATZ (Krzemieniec).

O nowym sposobie rozwiązywania równań stopnia trzeciego.

Chcąc rozwiązać równanie $z^3 + az^2 + bz + c = 0$, podstawiamy

$$z = x - \tfrac{1}{3}a$$

i otrzymujemy równanie, pozbawione drugiej potęgi niewiadomej:

$$(1) \qquad x^3 + px + q = 0,$$

gdzie p i q są wyrazami, zależnemi od a, b i c. Pragnę tu podać pewien — jak mi się wydaje — nowy sposób rozwiązywania równań typu (1).

Sposób mój polega na znalezieniu takich liczb A, B, m, n, aby przy każdej wartości x była spełniona równość

$$(2) \qquad x^3 + px + q = A(x + m)^3 - B(x + n)^3.$$

Wtedy otrzymamy równanie w postaci

$$(3) \qquad A(x + m)^3 - B(x + n)^3 = 0$$

i łatwo je będzie rozwiązać; zauważmy bowiem, że lewa strona równania rozkłada się na czynniki:

$$A(x + m)^3 - B(x + n)^3 = \left[\sqrt[3]{A}(x + m) - \sqrt[3]{B}(x + n)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[\sqrt[3]{A^2}(x + m)^2 + \sqrt[3]{AB}(x + m)(x + n) + \sqrt[3]{B^2})x + n)^2\right].$$

Przyrównywając ten iloczyn do zera, mamy dwie możliwości:

$$(4) \qquad \sqrt[3]{A}(x + m) - \sqrt[3]{B}(x + n) = 0,$$

$$(5) \qquad \sqrt[3]{A^2}(x + m)^2 + \sqrt[3]{AB}(x + m)(x + n) + \sqrt[3]{B^2}(x + n)^2 = 0.$$

Jak widzimy, z równania (4) łatwo będzie znaleźć jeden z pierwiastków danego równania (1).

Zajmijmy się przeto znalezieniem liczb A, B, m i n. Rozwijając prawą stronę równości (2), otrzymamy:

$$x^3 + px + q =$$
$$= (A - B)x^3 + 3(Am - Bn)x^2 + 3(Am^2 - Bn^2)x +$$
$$+ (Am^3 - Bn^3).$$

Jeżeli dwa wielomiany jednej zmiennej przybierają przy każdej wartości tej zmiennej równe wartości, to współczynniki przy odpowiednio równych potęgach zmiennej muszą być równe:

$$A - B = 1,$$
$$Am - Bn = 0,$$
$$Am^2 - Bn^2 = \tfrac{1}{3}p,$$
$$Am^3 - Bn^3 = q.$$

Mamy rozwiązać układ 4 równań z 4 niewiadomemi. Z pierwszego równania wyznaczamy $A = B + 1$ i podstawiamy do pozostałych równań:

$$B(m - n) + m = 0,$$
$$B(m^2 - n^2) + m^2 = \tfrac{1}{3}p,$$
$$B(m^3 - n^3) + m^3 = q.$$

Wyznaczamy teraz zespół $B(m - n) = - m$ i podstawiamy do dwóch ostatnich równań:

$$- m(m + n) + m^2 = \tfrac{1}{3}p,$$
$$- m(m^2 + mn + n^2) + m^3 = q.$$

Po uproszczeniach otrzymujemy:

$$mn = - \tfrac{1}{3}p,$$
$$m + n = \frac{3q}{p},$$

przyczem zakładamy, że $p \neq 0$. (Przypadek, gdy $p = 0$, daje równanie $x^3 + q = 0$, którego rozwiązanie nie nasuwa trudności).

Wartości m i n znajdziemy jako pierwiastki równania kwadratowego

$$u^2 - \frac{3q}{p}u - \tfrac{1}{3}p = 0. \tag{6}$$

Jeżeli się okaże, że równanie to ma wyróżnik *dodatni*, to posiada ono dwa pierwiastki *nierówne*. Przyjmując jeden z nich za m, a drugi za n, łatwo będziemy mogli wyznaczyć wartości A i B, mianowicie

$$B = \frac{-m}{m - n}, \qquad A = \frac{-n}{m - n}.$$

Podstawiając te wartości do równania (4) i mnożąc to równanie obustronnie przez $\sqrt[3]{m - n}$, otrzymamy równanie

$$- \sqrt[3]{n}\,(x + m) + \sqrt[3]{m}\,(x + n) = 0.$$

Stąd mamy po uporządkowaniu równanie w postaci:

$$(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})x = m\sqrt[3]{n} - n\sqrt[3]{m}.$$

Przekształcając prawą stronę, będziemy mieli:

$$(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})\,x = \sqrt[3]{mn}\,(\sqrt[3]{m} - \sqrt[3]{n})(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}),$$

a więc ostatecznie będziemy mieli

$$x = \sqrt[3]{mn}\,(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}). \tag{7}$$

Podstawiając do tego wzoru wartości m i n, wyznaczone z równania (4), otrzymamy wzór, znany pod nazwą wzoru C a r d a n a.

Przypisek Redakcji.

Udzielając miejsca sposobowi, przedstawionemu przez p. Marka K a t z a, który jest uczniem VIII klasy gimnazjalnej Liceum Krzemienieckiego, Redakcja musi dodać kilka uwag.

Autor artykułu ograniczył się do rozważania przypadku, kiedy wyróżnik równania (6) jest dodatni, czyli przypadku, kiedy wyrażenie

$$(\tfrac{1}{2}q)^2 + (\tfrac{1}{3}p)^3 \tag{8}$$

ma wartość dodatnią.

Z teorji równania trzeciego stopnia wiadomo, że w tym przypadku równanie (1) posiada jeden pierwiastek rzeczywisty. Metoda, opisana w artykule, odnosi się do znalezienia tego pierwiastka.

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) jest zerem, wyróżnik równania (6) jest zerem, a więc równanie to posiada pierwiastek podwójny:

$$m = n = \frac{3q}{2p}.$$

Ale w tym przypadku wzór (7) przybiera postać $x = \frac{3q}{p}$, i nietrudno sprawdzić przez bezpośrednie podstawienie, że wzór ten daje pierwiastek równania (1).

W przypadku, kiedy wyrażenie (8) ma wartość ujemną, m i n nie są liczbami rzeczywistemi. Zachodzi tu przypadek, znany pod nazwą *casus irreducibilis*, — tem osobliwy, że w tym przypadku równanie trzeciego stopnia posiada trzy pierwiastki rzeczywiste, ale nie można ich wyznaczyć drogą algebraiczną. Rzecz jasna, że i metoda, opisana przez p. M. K a t z a, zawodzi w tym przypadku. W samej rzeczy, równanie

$$(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$$

posiada trzy pierwiastki: $+ 1$, $+ 2$, $- 3$. Rozwijając lewą stronę, otrzymujemy równanie

$$x^3 - 7x + 6 = 0,$$

mamy więc wartości: $p = - 7$, $q = 6$. Równanie (6) przybiera postać

$$u^2 + \tfrac{6}{7}u + \tfrac{7}{3} = 0.$$

Łatwo sprawdzić że równanie to nie posiada pierwiastków rzeczywistych, a więc nie można wyznaczyć rzeczywistych wartości m i n, skąd jednak nie wynika, by dane równanie trzeciego stopnia nie posiadało pierwiastków.

O pewnej własności trójkąta spodkowego — według L. Fejér'a.

1. Zajmiemy się zagadnieniem: *w dowolny trójkąt ostrokątny ABC wpisać trójkąt UVW o możliwie najmniejszym obwodzie.* Pokażemy, że trójkąt *spodkowy*, t. j. trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości trójkąta ABC, ma mniejszy obwód, niż każdy inny trójkąt wpisany w trójkąt ABC.

2. W dany trójkąt ostrokątny ABC wpiszmy trójkąt UVW. Niech U leży na BC, V na CA, W na AB. Niech obrazami punktu U względem prostych AC i AB będą punkty U' i U''[1]. Wtedy odcinki UV i $U'V$ są równe, jako symetryczne. Z tego samego powodu $UW = U''W$. Obwód trójkąta UVW, który jest równy sumie odcinków UV, VW, WU, jest zatem równy długości linji łamanej $U'VWU''$.

Jeżeli punkt U pozostanie niezmienny, punkty V i W zaś przyjmą inne położenia, punkty U' i U'' nie poruszą się, są bowiem określone tylko przez punkt U i trójkąt ABC. Końce łamanej $U'VWU''$ pozostają zatem te same zawsze. Łamana, łącząca punkty U' i U'', będzie wtedy najkrótszej długości, gdy będzie poprostu *odcinkiem* $U'U''$. Wobec tego odcinek $U'U''$ jest równy najmniejszemu z obwodów trójkątów wpisanych, mających stały wierzchołek U. Niech takim trójkątem o najmniejszym obwodzie będzie UMN.

3. Ponieważ znaleźliśmy już trójkąt o najmniejszym obwodzie z pośród tych, które mają stały wierzchołek U, pozostaje więc nam już tylko porównać ze sobą owe minimalne trójkąty, odpowiadające rozmaitym położeniom punktu U, i wybrać z nich ten, którego obwód jest najmniejszy. Będzie on posiadał obwód najmniejszy ze wszystkich trójkątów wpisanych.

Chodzi o to, aby wybrać punkt U w taki sposób, żeby odcinek $U'U''$ był jak najmniejszy. Zauważmy w tym celu, że trójkąt $AU'U''$ jest *równoramienny*, albowiem odcinki AU' i AU'' są sobie równe, — każdy z nich jest wszak symetrycznym obrazem tego samego odcinka AU.

Podczas gdy długości ramion trójkąta $AU'U''$ są równe AU, a zatem zależą od położenia punktu U na BC, *wielkość kąta $U''AU'$ nie zależy od położenia U*, jest zgóry określona przez trójkąt ABC.

Z własności symetrji wypływają następujące związki między kątami figury:

[1] Obrazem punktu K względem prostej l nazywamy punkt symetryczny do K względem l.

$$UAB = U''AB, \quad UAC = U'AC.$$

Stąd po pierwsze $U''AU = 2\,UAB$,
po drugie $U'AU = 2\,UAC$.
Zatem $U'AU + U''AU = 2\,UAB + 2\,UAC$,
czyli $U'AU = 2\,BAC$,
co dowodzi naszego twierdzenia o kącie $AU''U'$.

4. W trójkącie równoramiennym $AU'U''$ odcinek $U'U''$ jest podstawą. Ponieważ kąt wierzchołkowy nie zależy od położenia M, zatem wszystkie trójkąty takie, jak $AU'U''$, odpowiadające rozmaitym położeniom punktu U, mają ten sam kąt wierzchołkowy. Ten z trójkątów ma najmniejszą podstawę, którego ramiona są możliwie najmniejsze. Ale ramiona są równe AU. Otrzymamy najkrótszy z odcinków $U'U''$, jeśli tak dobierzemy punkt U, aby AU było jak najkrótsze.

Odcinek AU łączy jednak punkt U z punktem prostej BC. Najkrótszym z odcinków, łączących punkt A z punktami prostej BC, jest odcinek prostopadły do BC; innemi słowy, AU musi być wysokością trójkąta ABC.

5. Obecnie można już skonstruować trójkąt wpisany o najmniejszym obwodzie. Przedewszystkiem niech E będzie spodkiem prostopadłej, poprowadzonej z A do BC. Niech E' i E'' będą obrazami punktu E względem prostych AC i AB. — $E'E''$ jest długością najmniejszego obwodu trójkąta wpisanego. Punkty przecięcia F i G prostej $E'E''$ z bokami AC i AB są pozostałemi wierzchołkami szukanego trójkąta minimalnego.

Każdy trójkąt wpisany UVW, różny od EFG, musi istotnie mieć obwód większy od obwodu EFG, jak się przekonamy, przeglądając ponownie bieg myśli. W rzeczy samej, albo wierzchołek U jest odmienny od E, — wtedy odcinek $U'U''$ jest większy od $E'E''$; albo wierzchołek U zlewa się z E, — wtedy przynajmniej jeden z wierzchołków U i W ma inne położenie, niż F i G, a zatem łamana $E'VWE''$ nie przystaje do odcinka $E'FGE''$. Tedy i w tym przypadku obwód UVW jest większy od obwodu EFG.

6. Zadanie: *w dany trójkąt ostrokątny wpisać trójkąt o jak najmniejszym obwodzie*, ma zatem rozwiązanie tylko jedno. Skorzystamy z tego dla wysunięcia dalszych wniosków. Nasza konstrukcja trójkąta minimalnego nie przebiegała w sposób podobny dla jego trzech wierzchołków. Jeden wierzchołek — E — znaleźliśmy, jako spodek wysokości trójkąta. Pozostałe wierzchołki F i G wyszukaliśmy bez prowadzenia wysokości z punktów B i C — zapomocą konstrukcji, opierającej się na pewnych symetrjach.

Otóż możnaby przeprowadzić wszystkie rozważania, odnoszące się do wierzchołka A trójkąta ABC, również w stosunku do wierzchołka B, a zatem zamiast znajdować obrazy punktu U względem boków AC i AB możnaby szukać obrazów punktu V względem boków BA i BC i odpowiednio postępować w dalszym ciągu. Otrzymalibyśmy, jako trójkąt o minimalnym obwodzie, taki trójkąt, którego wierzchołkiem byłby spodek F wysokości, poprowadzonej z B do AC. Ponieważ zaś istnieje *jeden* tylko trójkąt o obwodzie minimalnym, jakeśmy stwierdzili powyżej, przeto konstrukcja, zaczynająca od B, prowadzić musi do tego samego trójkąta EFG, co konstrukcja, zaczynająca od A.

To samo tyczy się i rozpoczęcia od C. Wyciągamy wniosek, że w trójkącie o obwodzie minimalnym nietylko E, lecz i F i G są spodkami wysokości. — Okazaliśmy w ten sposób prawdziwość zapowiedzianego twierdzenia o minimalnej własności trójkąta spodkowego.

7. Dowód nasz dostarcza nam jednocześnie czegoś więcej. Podobnie jak na tej podstawie, że rozwiązanie jest jedyne, przypisaliśmy punktom F i G własność, która przysługiwala E, możemy odwrotnie twierdzić, że dla E musi obowiązywać własność, którą z mocy samej konstrukcji posiadają punkty F i G. Na podstawie własności symetrji, kąt EFG jest równy kątowi $E'FC$. Ponieważ zaś kąty wierzchołkowe $E'FC$ i GFA są sobie równe, to słusznem jest twierdzenie o równości kąta EFC i kąta GFA; innemi słowy: boki trójkąta EFG, wychodzące z F, tworzą z bokiem AC trójkąta ABC jednakowe kąty. Podobna rzecz zachodzi w punkcie G. Gdybyśmy F znaleźli, jako spodek wysokości, poprowadzonej z B, moglibyśmy E określić zapomocą konstrukcji, opierającej się na symetrjach, a zatem kąty GEB i FEC muszą być też równe.

Wiemy z 6., że trójkąt EFG może być scharakteryzowany, jako trójkąt spodkowy. Łącząc to z rozważaniem przed chwilą przeprowadzonem, dochodzimy do twierdzenia:

Boki trójkąta spodkowego, wpisanego w trójkąt ostrokątny ABC, tworzą z bokami trójkąta ABC kąty parami równe, a mianowicie równe są kąty, leżące przy tym samym boku trójkąta ABC.

To twierdzenie nie wspomina o *minimum* i należy w swem brzmieniu w zupełności do zwyczajowej geometrji elementarnej, w ramach której może być okazane[1]). Wyższość dowodu F e j é r a polega na tem, że nie opiera się on na żadnych innych własnościach poza własnościami symetrji i poza twierdzeniem, że odcinek jest krótszy od łamanej, łączącej jego końce.

Wyjątek z książki: H. R a d e m a c h e r — O. T o e p l i t z. *Von Zahlen und Figuren.* Berlin 1930.

[1]) Patrz np. *„Zarys geometrji elem."* W. W o j t o w i c z a — § 126.

KĄCIK BEZ TYTUŁU.

Miara w oku.

Weź banknot 10-złotowy albo 20-złotowy i oceń na oko, ile potrzeba monet dwugroszowych albo dziesięciogroszowych, aby można było niemi przykryć siedmiocyfrowy numer, wydrukowany na banknocie.

Oceń na oko, ile razy większa jest średnica monety 5-złotowej od średnicy monety 10-groszowej.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ.

Nr. 141. *Wyzyskanie tektury.* Mamy kwadratowy arkusz tektury o boku a. W czterech narożnikach tej tektury wycinamy kwadraty o boku x. W ten sposób otrzymujemy siatkę otwartego pudełka o denku kwadratowem. Dobrać x w taki sposób, aby pojemność pudełka była możliwie największa.

Pojemność y pudełka wyraża się wzorem $y = (a - 2x)^2 x$, gdzie $0 < x < \frac{1}{2}a$. Stosując opisaną w artykule p. Wł. W o j t o w i c z a metodę, wyznaczamy, że pojemność y osiąga maximum przy $x = \frac{1}{6}a$.

Nr. 142. *Maximum walca.* Kula i walec są tak położone, że jedna podstawa walca jest wpisana w kulę, a druga podstawa walca dotyka kuli. Mając dany promień kuli R, dobrać wysokość walca x w taki sposób, aby objętość walca była największa.

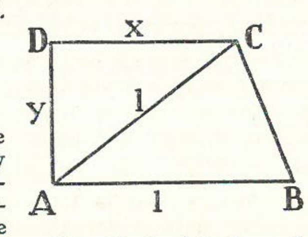
Rozważmy stożek, którego podstawą jest podstawa walca, wpisana w kulę, a wierzchołek leży w punkcie styczności drugiej podstawy walca z kulą. Stożek ten jest wpisany w kulę. Objętość tego stożka jest trzecią częścią objętości walca, o którym mowa w zadaniu. Zagadnienie sprowadza się do wyznaczenia wpisanego w daną kulę stożka o największej objętości, a to zadanie jest rozwiązane w artykule p. Wł. W o j t o w i c z a.

Nr. 143. (1). W trapezie prostokątnym $ABCD$ podstawa AB i przekątna AC mają daną długość l. Wyznaczyć drugą podstawę $CD = x$ i wysokość $AD = y$ tak, aby stosunek objętości stożka ściętego, powstałego od obrotu trapezu $ABCD$ dookoła wysokości AD, miał zgóry daną wartość m. Dyskusja.

W trójkącie ABC boki AB i AC są równe; stąd wniosek, że kąt przy B jest ostry. Skoro trapez jest prostokątny, to jego kąt przy A, a także kąt przy D, muszą być proste.

Przyjmiemy założenia: $l > 0$, $m > 0$.

Układamy warunki:



(1) $x^2 + y^2 = l^2$

(2) $\frac{1}{3}\pi y(x^2 + lx + l^2) = m \cdot \frac{1}{6}\pi y^3$

(3) $x > 0, \quad y > 0.$

Warunki te są konieczne i dostateczne do budowy trapezu: mając obliczone podpory (przyprostokątne) x i y trójkąta prostokątnego ADC, możemy go skonstruować, a spełnienie równania (1) gwarantuje, że wiążnica (przeciwprostokątna) będzie miała długość l; dobudowanie trapezu przez konstrukcję odcinka AB, równoległego do DC i równego AC, nie sprawi żadnej trudności.

Rugując y z równań (1) i (2), otrzymamy równanie

(4) $(m+2)x^2 + 2lx - (m-2)l^2 = 0.$

Szukamy warunków, przy których równanie to posiada pierwiastek dodatni. Jeżeli równanie (4) posiada pierwiastki, to ich suma jest ujemna: stąd wniosek, że przynajmniej jeden z dwóch pierwiastków musi być ujemny. Skoro wymagamy, żeby równanie posiadało pierwiastek dodatni, to zachodzi jedna tylko możliwość, że jeden z pierwiastków jest ujemny, a drugi dodatni; ale wtedy iloczyn pierwiastków jest ujemny. Musimy więc przyjąć: $m > 2$. Jest to warunek konieczny dla istnienia dodatniego pierwiastka równania (4), ale zarazem jest to warunek dostateczny. W samej rzeczy, jeżeli $m > 2$, to wyróżnik równania (4) jest dodatni, a więc równanie posiada dwa pierwiastki, a ponieważ iloczyn tych pierwiastków jest ujemny, przeto pierwiastki mają znaki przeciwne, czyli ostatecznie jeden z pierwiastków jest dodatni.

$$x = \frac{\sqrt{m^2 - 3} - 1}{m + 2}\, l.$$

Pozostaje tylko wyznaczenie wartości y, którą otrzymujemy z równania (1).

Nr. 148. — *Goście w restauracji.* W sali restauracyjnej było 11 gości. Każdy z nich zamienił uścisk dłoni ze wszystkiemi osobami, które siedziały przy tym samym stoliku. Wymieniono 19 uścisków dłoni. Przy ilu stolikach siedzieli goście i po ile osób siedziało przy każdym ze stolików? *A. M. R.*

Wyobraźmy sobie, że zamiast uścisków dłoni goście zamieniali się biletami wizytowemi. Jeżeli przy stoliku jest n osób, to każda z nich wyda $(n-1)$ biletów wizytowych, a więc ogółem będzie w ruchu $n(n-1)$ biletów. Ponieważ jeden uścisk dłoni odpowiada wymianie pary biletów, przeto n osób zamienią między sobą $\frac{1}{2}n(n-1)$ uścisków dłoni.

Ułóżmy tabelę ilości uścisków dłoni dla różnych wartości n:

Liczba osób przy stoliku:	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...
Liczba uścisków dłoni:	0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

Z tabeli tej widać, że przy żadnym stoliku nie siedziało więcej, niż 6 osób. Wyczerpując wszystkie możliwości, stwierdzamy, że istnieje tylko jedno rozwiązanie:

Osoby przy stolikach: $6 + 3 + 2 = 11,$
uściski dłoni: $15 + 3 + 1 = 19.$

Nr. 149. *Wojsko Aleksandra Macedońskiego.* Aleksander Wielki rozdzielił wojsko swoje, liczące 30 234 ludzi, między dwunastu wodzów. Wódz I otrzymał 2 razy tyle wojska, co II; III — 3 razy tyle, co IV; V — 4 razy tyle, co VI; VII — 5 razy tyle, co VIII; IX — 6 razy tyle, co X; XI — 7 razy tyle, co XII. Należy wykonać taki podział, aby wodzowi, któremu przypada najmniejsza ilość ludzi, przydzielić ich możliwie najwięcej. (*Według Jana Brożka podał A. M. R.*).

Niechaj najmniejsza ilość ludzi będzie x. Oznaczmy przydziały II, IV, VI, VIII, X i XII wodza odpowiednio przez $x + r_1$, $x + r_2$, $x + r_3$ $x + r_4$, $x + r_5$, $x + r_6$, gdzie drugie składniki są liczbami nieujemnemi, przyczem co najmniej jedna z nich musi być zerem. — Łatwo ułożyć równanie

$$33x + 3r_1 + 4r_2 + 5r_3 + 6r_4 + 7r_5 + 8r_6 = 30\,234.$$

Trzeba znaleźć takie rozwiązanie, przy którem x osiąga wartość możliwie największą. Dzieląc 30 234 przez 33, otrzymujemy iloraz 916 i resztę 6. Zadanie ma dwa rozwiązania:

$x = 916,\ r_1 = 2,\ r_2 = 0,\ r_3 = 0,\ r_4 = 0,\ r_5 = 0,\ r_6 = 0,$
albo
$x = 916,\ r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ r_3 = 0,\ r_4 = 1,\ r_5 = 0,\ r_6 = 0.$

Stąd wniosek: wszyscy wodzowie z numerami parzystemi mieli po 916 ludzi — z wyjątkiem bądź II wodza, któremu przypadłoby 918 ludzi, bądź VIII wodza, któremu przypadłoby 917 ludzi.

W dziale zadań podajemy analogiczne zadanie nieoznaczone.

Nr. 150. *Partje ping-ponga.* Do ucznia przyszło n kolegów. Każdy grał po jednej partji. Ile było partyj?

Użyjmy takiego chwytu: Niech każdy gracz da swemu partnerowi bilet wizytowy. Wszystkich uczestników gry było $(n + 1)$, a każdy dał po n biletów, a więc ogółem było $n(n + 1)$ biletów wizytowych. Partyj było 2 razy mniej, gdyż na każdą partję przypadało po 2 bilety wizytowe. — *Uwaga:* Iloczyn $n(n + 1)$ jest zawsze podzielny przez 2, gdyż jeden z dwóch jego czynników musi być parzysty. *A. M. R.*

Nr. 151. *Ćwiczenia spostrzegawczości.* Rozwiążmy „w lot" równania:

1) $(x - 1)\cdot(x - 2) = 2.$

Widać odrazu, że jednym z pierwiastków jest $x = 0$. Biorąc równocześnie $x - 1 = 2$ i $x - 2 = 1$, uczynimy równaniu zadość, przyczem $x = 3$. Ponieważ równanie jest kwadratowe, przeto dalszych pierwiastków niema.

2) $(x - 12)\cdot x = 12\cdot(x - 12).$

Udajmy, że nie znamy pierwiastków tego równania. Dla wartości x można przyjąć jedno z dwóch przypuszczeń: $x = 12$ albo $x \neq 12$. — Przypuszczając, że $x = 12$, otrzymujemy po obu stronach równania zera, a więc liczba 12 jest pierwiastkiem danego równania. — Przypuśćmy teraz, że $x \neq 12$. W takim razie możemy podzielić obie strony równania przez $(x - 12)$ i otrzymamy wniosek: $x = 12$. Z założenia $x \neq 12$ wynika jego zaprzeczenie: $x = 12$. Założenie więc jest nieprawdziwe, gdyż z prawdy nie może wynikać jej zaprzeczenie; a skoro założenie $x \neq 12$ jest nieprawdziwe, to musi być prawdziwe jego zaprzeczenie: $x = 12$. — Widzimy więc, że liczba 12 jest podwójnym pierwiastkiem równania.

3) $x\cdot(x + 8) = 20.$

Przyjmując jednocześnie $x = 2$ i $x + 8 = 10$, uczynimy zadość równaniu pierwiastkiem równym liczbie 2. Rzut oka wystarcza, aby stwierdzić, że równanie sprowadza się do postaci: $x^2 + 8x - 20 = 0$. Znając pierwiastek 2, dobieramy drugi pierwiastek -10, gdyż iloczynem pierwiastków jest liczba -20.

4) $(3 - x)^2 = (x - 1)^2.$

Liczba 2 jest pierwiastkiem równania. Wyrazy x^2 po obu stronach równania wzajemnie się redukują, a więc równanie jest pierwszego stopnia i posiada tylko jeden pierwiastek.

5) $(x + 1)\cdot(x + 2) = (x - 1)\cdot(x - 2).$

Liczba 0 jest pierwiastkiem równania. Innych pierwiastków niema, gdyż po uproszczeniu otrzymuje się równanie pierwszego stopnia. *A. M. R.*

Przydział punktów za poprawnie rozwiązane zadania podamy po wakacjach.

Składamy gratulacje tym z pośród przyjaciół „Młodego Matematyka", którzy w bieżącym roku uzyskali matury, i prosimy zachować nadal przyjaźń dla czasopisma.

Składając Czytelnikom życzenia wesołych wakacyj, przypominamy że „Parametr" i „Młody Matematyk" są dobrymi przyjaciółmi Czytelnika w słotne dni wakacyjne. Rozwiązania zadań można nadsyłać przez całe wakacje.

Osoby, które nadsyłają do Redakcji rozwiązania zadań, proszone są o zawiadomienie Redakcji o zmianach adresu w roku szkolnym czy akademickim 1931-32.

ZADANIA.

ZADANIA NA EGZAMINIE DO POLITECHNIKI W WARSZAWIE.

(Egzamin wstępny na Wydział Mechaniczny.)

W zeszycie Nr. 1 podaliśmy tematy z algebry i fizyki. Obecnie podajemy tematy z geometrji. Każdy kandydat otrzymywał dwa tematy geometryczne — na 3 godziny.

Geometrja.

Nr. 188. — 1. Kąty płaskie przy wierzchołku ostrosłupa foremnego trójkątnego mają daną wartość α zaś promień kuli opisanej na ostrosłupie wynosi R. 1) Obliczyć długość krawędzi i objętość ostrosłupa. 2) Wykazać, dla jakich kątów α ostrosłup jest możliwy. 3) Wskazać, dla jakich kątów α środek kuli opisanej leży wewnątrz ostrosłupa, a dla jakich leży zewnątrz niego.

2. Wykreślić dziesięciokąt foremny, mając dany jego bok.

Nr. 189. — 1. Dany jest bok podstawy a ostrosłupa foremnego czworokątnego i kąt nachylenia krawędzi do płaszczyzny podstawy α. Znaleźć promień kuli stycznej do krawędzi bocznych i do krawędzi podstawy ostrosłupa; określić położenie środka takiej kuli.

2. Wykreślić trójkąt, mając daną jego podstawę, jeden z kątów do niej przyległych i stosunek boków pozostałych.

Nr. 190. — 1. Dany jest kąt dwuścienny a przy podstawie ostrosłupa foremnego sześciokątnego i promień kuli r wpisanej w ten ostrosłup. Obliczyć długość krawędzi bocznej i objętość ostrosłupa. Odwrotnie, wyznaczyć kąt α, aby objętość ta miała zgóry daną wartość V. Dyskusja. (Jako niewiadomą należy obrać $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$).

2. Wykreślić sześciokąt foremny równoważny danemu kwadratowi.

Nr. 191. — 1. Mając dany kąt dwuścienny a przy podstawie ostrosłupa foremnego czworokątnego, obliczyć stosunek promienia kuli opisanej na tym ostrosłupie do promienia kuli weń wpisanej. Odwrotnie, obliczyć kąt α, wiedząc, iż powyższy stosunek ma zgóry daną wartość m; dyskusja. (Jako niewiadomą należy obrać $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha$).

2. Zbudować prostokąt, mając dane jego obwód i przekątną (metodą konstrukcji geometrycznej).

Za tematy Nr. 1 — po 4 punkty, a za Nr. 2 — po 2 punkty.

ZADANIA NA EGZAMINIE DO POLITECHNIKI W WARSZAWIE.

(Egzamin wstępny na Wydział Chemiczny.)

Każdy kandydat otrzymał 3 zadania na 3 godziny.

Nr. 192. — 1. Zbadać w zależności od parametra m rozwiązania układu równań:

$$4x^2 + y^2 - 4x = 0,$$
$$y = 2x + m.$$

2. W prosty stożek kołowy S, mający między tworzącą i wysokością kąt α, wpisano kulę K. Znaleźć stosunek objętości stożka S do objętości mniejszego stożka S', współwierzchołkowego z S i odciętego od S płaszczyzną, równoległą do podstawy stożka S i styczną do kuli K.

3. Udowodnić twierdzenie: *dwie różne proste, równoległe do tej samej trzeciej, są do siebie równoległe.*

Nr. 193. — 1. Znaleźć w zależności od parametra m rozwiązania układu równań:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10,$$
$$y = m(x - 5) + 4.$$

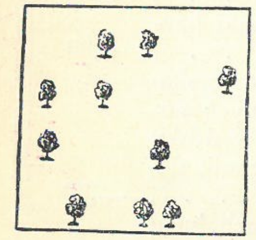
2. W prosty stożek kołowy S, mający między tworzącą i podstawą kąt α, wpisano kulę K, a w nią stożek S' o osi, leżącej na osi stożka S, i o tworzących, równoległych do tworzących stożka S. W stożek S' wpisano kulę K'. Znaleźć stosunek objętości kul K i K'.

3. Udowodnić twierdzenie: *prosta, prostopadła do jednej z dwóch płaszczyzn równoległych, jest prostopadła do drugiej.*

Za tematy Nr. 3 — po 3 punkty, za Nr. 2 — po 2 punkty, za Nr. 1 — po 1 punkcie.

ZADANIA ROZRYWKOWE.

Nr. 194. *Łamigłówka o działach ziemi.* Dziadek, który posiadał kawałek ziemi w kształcie kwadratu, podzielił go między syna i czterech wnuków w ten sposób, że dla syna przeznaczył czwartą część całości, również kwadratową, resztę zaś podzielił na cztery równe części, uważając i na to, aby każdemu z nich dostały się po dwa drzewa. Jaki kształt musiał nadać każdej działce, jeżeli kwadrat syna mieścił się w jednym rogu całości?



Za rozwiązanie 3 punkty.

A. D. („Płomyk". Nr. 36. 1931).

Nr. 195. *Zadanie nieoznaczone. (W związku z zadaniem Nr. 149).* W bibljoteczce były książki po 3, 4, 5, 6, 7 i 8 zł. Ogólna wartość tych książek wynosiła 68 zł. Ile było książek każdej ceny? *A. M. R.*

Za pełne rozwiązanie 5 punktów.

Nr. 196. *Łamigłówka logiczna.* Ubiegający się o państwowe posady urzędnicze Anglicy muszą — poza wykazaniem się odpowiedniem cenzusem wykształcenia — przejść przez próbny ogień bardzo swoistego egzaminu, który nosi nazwę „próba inteligencji".

W ostatnich czasach liczba kandydatów na posady rządowe wzrosła niepomiernie, a wszyscy niemal posiadają najlepsze świadectwa i referencje. Zaszła więc potrzeba przeprowadzenia selekcji kandydatów w sposób możliwie najsurowszy.

W tym właśnie celu ustanowiono „próbę inteligencji". Jak dalece trudna jest owa próba, świadczy następujące zadanie, dane na jednym z ostatnich egzaminów urzędniczych w Londynie, które podajemy tu w polskiej trawestacji:

— „Nazwiska maszynisty kolejowego, konduktora i palacza na lokomotywie — nie w odpowiednim porządku — brzmią: Kowalski, Piotrowski, Zawadzki.

— Nazwiska pasażerów były: Dr. Kowalski, Dr. Piotrowski, Dr. Zawadzki.

— Dr. Kowalski mieszka w Warszawie.

— Konduktor mieszka w połowie drogi pomiędzy Warszawą i Poznaniem.

— Pasażer, noszący to samo nazwisko, co konduktor, mieszka w Poznaniu.

— Dr. Piotrowski zarabia rocznie 12 500 złotych.

— Pasażer, który mieszka w najbliższem sąsiedztwie konduktora, zarabia dokładnie 3 razy więcej, niż konduktor.

— Zawadzki wygrał od palacza partję bilardu.

— Pytanie: jak się nazywa maszynista?"

Na roztrząsanie tego zawiłego pytania dawano 15 minut.

Za rozwiązanie 10 punktów. *(Temat pożyczony.)*

PARAMETR, czasopismo poświęcone nauczaniu matematyki, wychodzi 10 razy do roku pod redakcją A. M. Rusieckiego przy współudziale S. Straszewicza. Prenumerata PARAMETRA z dodatkiem MŁODEGO MATEMATYKA kosztuje 15 zł rocznie (8 zł półrocznie). — MŁODY MATEMATYK w osobnej prenumeracie kosztuje 4 zł rocznie (2,20 zł półrocznie). Przy zbiorowej prenumeracie (pod wspólną opaską) cena zniżona: od 10 egz. — po 3,60 zł rocznie (2 zł półrocznie), od 20 egz. — po 3,20 zł rocznie (1,80 zł półrocznie). — Oddzielny zeszyt kosztuje 50 groszy.

Adres Redaktora: A. M. Rusiecki, Warszawa, ul. Koszykowa 31, m. 5.

Adres Administracji: Poznań, Al. Marcinkowskiego 22.

Konto czekowe P. K. O. Poznań, Nr. 213 622. Właściciel konta: PARAMETR — MŁODY MATEMATYK.

Redaktor odpowiedzialny: Antoni Marjan Rusiecki w Warszawie. — Wydawca: Drukarnia i Księgarnia św. Wojciecha. — Tłoczono w Drukarni św. Wojciecha w Poznaniu.

NOTATKI BIBLJOGRAFICZNE.

= PERSPEKTYWA | MALARSKA | Zasady — Zarys historyczny — Estetyka | Napisał | Dr. Kazimierz Bartel | Profesor Politechniki Lwowskiej | Tom I. | Z 397 ilustracjami | | Książnica-Atlas | | | Lwów—Warszawa | 1928 | = *W przedtytule:* Nauka i Sztuka | Tom XVI |

For. 24×17. Rys. 397. Cena zł 45,—, w płótnie zł 52,—.

Rozdziały: I. O odwzorowaniu perspektywicznem na płaszczyźnie. — II. Zasady płaskiej perspektywy stosowanej. — III. Perspektywa krzywych stożkowych. — IV. Perspektywa powierzchni obrotowych. — V. Perspektywa obrazów odbitych w zwierciadłach płaskich. — VI. Konstrukcja cieni. — VII. Perspektywa pośrednia.

= PRZEGLĄD MATEMATYCZNO-FIZYCZNY. Kwartalnik naukowy i pedagogiczny. Pod redakcją Wł. Wojtowicza i S. Straszewicza.

Rok I. 1923. Nr. 1. — Cena zł 1,50. (*W roku 1923 wyszedł tylko jeden zeszyt*).

Rok II. 1924. Nr. 3—4. — Cena zł 3.—. (*Zeszyt Nr. 1—2 wyczerpany*).

Rok III. 1925. Nr. 1—2 i 3—4. — Cena zł 6.—. (*Komplet rocznika III.*)

Zamówienia należy kierować do Książnicy-Atlas (Lwów, ul. Czarnieckiego 12).

= PRZYRODA I TECHNIKA. Miesięcznik, poświęcony naukom przyrodniczym i ich zastosowaniu. Prenumerata roczna — zł 8,40. Adres Administracji: Książnica-Atlas. Lwów, Czarnieckiego 12. — P. K. O. Konto Nr. 149 598.

= F. Burdecki | PODRÓŻE | MIĘDZYPLANETARNE | 25 ilustracyj | Książnica-Atlas | | | Lwów-Warszawa | 1929.

For. $19\frac{1}{2} \times 13\frac{1}{2}$. Str. $90 + 1^0$, rys. 22. Cena w opr. zł 4,80.

= Dr. Feliks Burdecki | TAJEMNICE MARSA | 24 rycin i 6 tablic | Książnica-Atlas | | | Lwów-Warszawa | 1931.

For. $19\frac{1}{2} \times 13\frac{1}{2}$. Str. $4^0 + 174$, rys. 24 i tablic 6. Cena w opr. zł . . .

OD WYDAWNICTWA!

Do P. T. Prenumeratorów „Parametra“.

Przypominamy że czas wznowić prenumeratę pisma na drugie półrocze 1931. Następny zeszyt „Parametra“ ukaże się z początkiem września b. r. Kto przed 31. sierpnia nie zawiadomi o cofnięciu prenumeraty, będzie uważany za abonenta na drugie półrocze b. r.