Zbiory Gerszgorina i Brauera danej macierzy

Alicja Wróbel

Politechnika Śląska - Wydział Matematyki Stosowanej

Gliwice, 22 września 2016

Lokalizacja wartości własnych macierzy na płaszczyźnie zespolonej

Pytanie

Dlaczego warto rozważać problem lokalizacji wartości własnych na płaszczyźnie zespolonej?

Definicja zbioru Gerszgorina

Definicja

Kołem Gerszgorina macierzy $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, $A = [a_{jk}]_{n\times n}$ nazywamy każde koło na płaszczyźnie Gaussa opisane nierównością:

$$|\lambda - a_{kk}| \leqslant \sum_{j\neq k} |a_{jk}|.$$

Zbiorem Gerszgorina macierzy A nazywamy sumę mnogościową wszystkich kół Gerszgorina danej macierzy.

Twierdzenie Gerszgorina

Twierdzenie

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ i dowolnej wartości własnej λ tej macierzy, istnieje $k = k(\lambda) \in \mathbb{N}$ takie, że:

$$|\lambda - a_{kk}| \leqslant \sum_{i \neq k} |a_{ik}|.$$

Zatem spektrum danej macierzy zawiera się w jej zbiorze Gerszgorina.

Twierdzenie Gerszgorina

Dowód

Weźmy dowolną wartość własną λ i odpowiadający jej wektor własny $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

$$\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]^T \in \mathbb{C}^n.$$

Zauważmy, że wtedy istnieje $k \in \{1, ..., n\}$, takie, że:

$$0 < |x_k| = max\{|x_i| : i \in 1, ..., n\}.$$

Dla tak dobranego k mamy:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ki} \cdot x_i = \lambda x_k$$

lub równoważnie:

$$(\lambda - a_{kk}) x_k = \sum_{i \neq k} a_{ki} \cdot x_i.$$

Twierdzenie Gerszgorina

Dowód c.d.

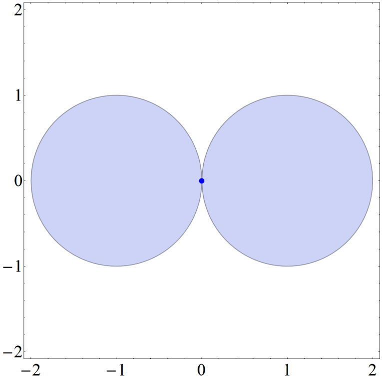
Teraz biorąc wartości bezwzględne obydwu stron równania, a także korzystając z nierówności trójkąta otrzymujemy:

$$|\lambda - a_{kk}| \cdot |x_k| \leqslant \sum_{i \neq k} |a_{ki}| \cdot |x_i| \leqslant \sum_{i \neq k} |a_{ki}| \cdot |x_k| = |x_k| \cdot \sum_{i \neq k} |a_{ki}|.$$

Dzieląc obie strony przez $|x_k| > 0$ otrzymujemy tezę. □

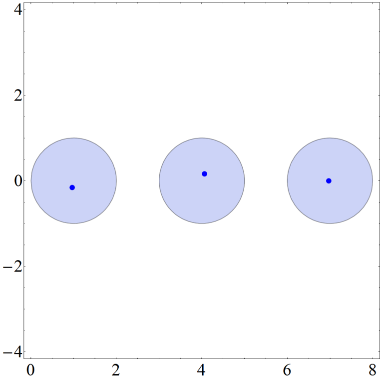
Przykład 1. - Wartości własne znajdują się na brzegu zbioru Gerszgorina

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

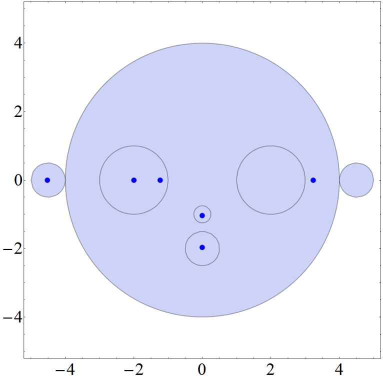


Przykład 2. - Dokładnie jedna wartość własna zlokalizowana w każdym kole

$$B = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1/2 & 4 & i/2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$



Przykład 3. - Mogą istnieć koła, w których nie ma żadnej wartości własnej



Przykład 3. - Mogą istnieć koła, w których nie ma żadnej wartości własnej

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & -i & 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & -2i & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9/2 & 1/2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -9/2 \end{bmatrix}$$

Dokładnie jedna wartość własna w każdym kole

Twierdzenie

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ i dowolnego wektora $\mathbf{x} > 0$, $\mathbf{x} = [x_1, ..., x_n]$ wartości własne macierzy A zawierają się w sumie mnogościowej zbiorów postaci:

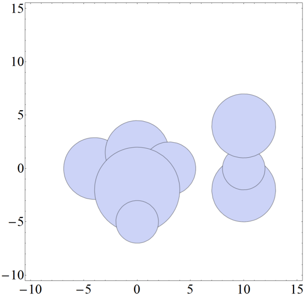
$$|\lambda - a_{kk}| \leqslant \sum_{j\neq k} \frac{|a_{kj}| \cdot x_j}{x_k},$$

Każdy taki zbiór nazywać będziemy $\mathbf{x}$ - kołem Gerszgorina o indeksie k, $k = 1, ..., n$.

Dokładnie jedna wartość własna w każdym kole

Twierdzenie

Niech będzie dany zbiór $S \subset \{1, \dots, n\}$. Jeżeli dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$ i dowolnego wektora $\mathbf{x} > 0$, dla którego $\mathbf{x}$ - koła Gerszgorina o indeksach $k \in S$ są rozłączne z kołami odpowiadającymi indeksom należącym do dopełnienia zbioru S, to koła odpowiadające indeksom ze zbioru S zawierają dokładnie $|S|$ wartości własnych macierzy A.



Dokładnie jedna wartość własna w każdym kole

Wniosek

Jeżeli każde koło Gerszgorina jest izolowane, tzn. rozłączne z pozostałymi kołami Gerszgorina, to w każdym kole znajduje się dokładnie jedna wartość własna macierzy A.

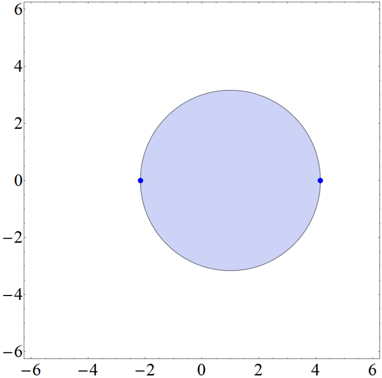
Rzeczywiste wartości własne

Wniosek

Załóżmy, że elementy głównej przekątnej macierzy A i współczynniki wielomianu charakterystycznego tej macierzy są rzeczywiste. Wówczas, jeżeli koła Gerszgorina są parami rozłączne, to wszystkie wartości własne macierzy A są rzeczywiste.

Rzeczywiste wartości własne - przykład 1

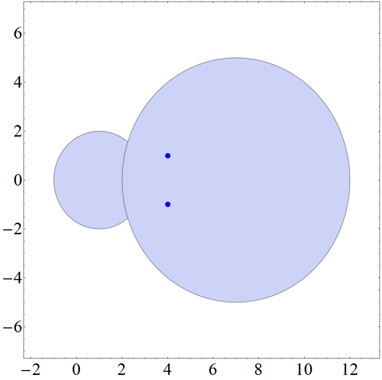
$$D = \begin{bmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 1 \end{bmatrix}$$



Spektrum macierzy $\sigma(D) = \{1+\sqrt{10}, 1-\sqrt{10}\}$

Rzeczywiste wartości własne - przykład 2

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$



Spektrum macierzy $\sigma(E) = \{4+i, 4-i\}$

Wniosek 1

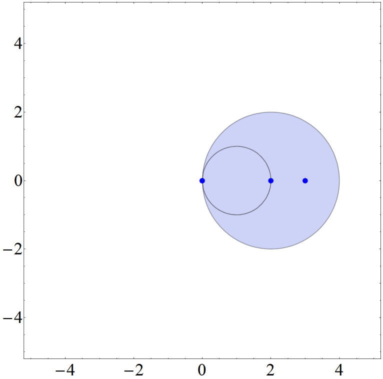
Wniosek

Jeżeli λ jest wartością własną macierzy A i defekt macierzy $A - \lambda E$ jest równy m, to λ leży w co najmniej m różnych kołach Gerszgorina.

Wniosek 1 - przykład

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wniosek 1 - przykład



Wniosek 1 - przykład

wartość własna	defekt macierzy $A - \lambda E$	liczba kół, w których leży wartość własna	krotność wartości własnej
3	1	1	1
2	1	2 (*redukcja* 4)	1
0	2	2 (*redukcja* 4)	2

Wniosek 2

Wniosek

Dane są dwie macierze kwadratowe A, B stopnia n. Załóżmy, że:

$$|a_{ij}| < b_{ij}$$

dla dowolnych $i, j \leqslant n$. Wówczas dowolna wartość własna macierzy A leży w co najmniej jednym z kół:

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant |\mu| - b_{ii}$$

gdzie μ jest maksymalną, (co do modułu) wartością własną macierzy B.

Wniosek 3

Wniosek

Niech $A = B + C$, gdzie B jest macierzą diagonalną o elementach $b_1, ..., b_n$, natomiast C jest macierzą o elementach c_{kl}. Jeżeli $rankA = n$ i dla każdego j mamy:

$$\min_{k \neq j} |b_j - b_k| = \beta_j > 0,$$

$$\max_{k,l} |c_{kl}| = \varepsilon < \frac{b_j}{2n},$$

to macierz A posiada co najmniej jedną wartość własną w kole:

$$|\lambda - b_j - c_{jj}| \leqslant \frac{2n(n-1)\varepsilon^2}{\beta_j},$$

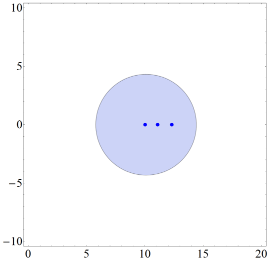
dla każdego $j = 1, ..., n$.

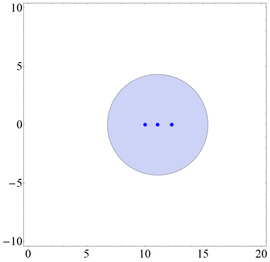
Wniosek 3 - przykład

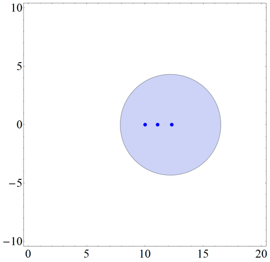
$$B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10.1 & 0.1 & 0.5 \\ 0.6 & 11.1 & 0.5 \\ 0.2 & 0.1 & 12.2 \end{bmatrix}$$

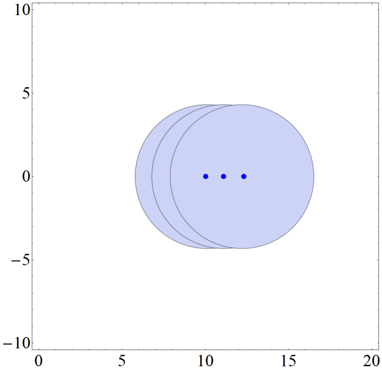
Wniosek 3 - przykład







Wniosek 3 - przykład



Twierdzenie 1

Twierdzenie

Dla dowolnego $\alpha \in [0, 1]$, każda wartość własna macierzy $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ leży w co najmniej jednym z kół:

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant \left(\sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)^{\alpha} \left(\sum_{j\neq i} |a_{ji}|\right)^{1-\alpha}$$

gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$.

Twierdzenie 2

Twierdzenie

Jeżeli macierz $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ dana jest w postaci macierzy blokowej $[A_{\alpha\beta}]_{s\times s}$ oraz λ jest jej wartością własną, to istnieje α, $1 \leqslant \alpha \leqslant s$ takie, że λ nie jest wartością własną bloku $A_{\alpha\alpha}$ oraz zachodzi nierówność:

$$\|(A_{\alpha\alpha} - \lambda E_\alpha)^{-1}\|^{-1} \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant\beta\leqslant s\\ \beta\neq\alpha}} \|A_{\alpha\beta}\|$$

gdzie E_α oznacza macierz jednostkową stopnia α oraz mamy dowolnie ustaloną normę macierzową. Ponadto istnieje α, $1 \leqslant \alpha \leqslant s$ takie, że λ nie jest wartością własną bloku $A_{\alpha\alpha}$ oraz zachodzi nierówność:

$$\|(A_{\alpha\alpha} - \lambda E_\alpha)^{-1}\|^{-1} \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant\beta\leqslant s\\ \beta\neq\alpha}} \|A_{\beta\alpha}\|$$

opis jak powyżej.

Owale Cassiniego i zbiory Brauera

Twierdzenie

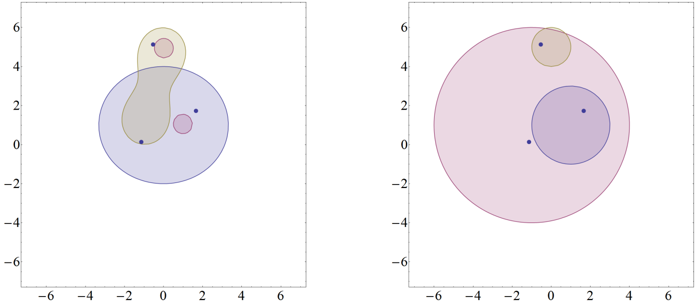
Każda wartość własna macierzy $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ leży w co najmniej jednym z obszarów:

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot |\lambda - a_{jj}| \leqslant \sum_{k\neq i} |a_{ik}| \sum_{k\neq j} |a_{jk}|$$

gdzie $1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j$. Obszary te to **owale Cassiniego**. Suma mnogościowa wszystkich opisanych powyżej owali nosi nazwę **zbioru Brauera macierzy A** i co interesujące, jest podzbiorem zbioru Gerszgorina macierzy A.

Porównanie zbiorów Brauera i Gerszgorina

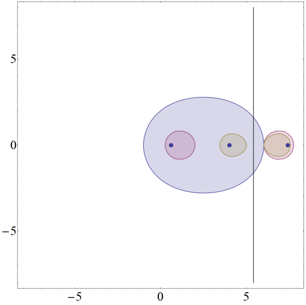
$$G = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ 0 & -1+i & 5 \\ 1 & 0 & 5i \end{bmatrix}$$

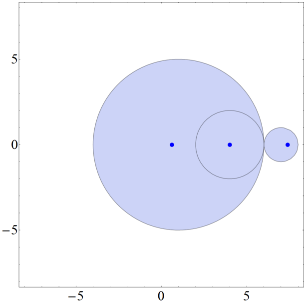


Rysunek: Odpowiednio zbiór Brauera i zbiór Gerszgorina macierzy G

Porównanie zbiorów Brauera i Gerszgorina

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0.5 & 4 & 1.5 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

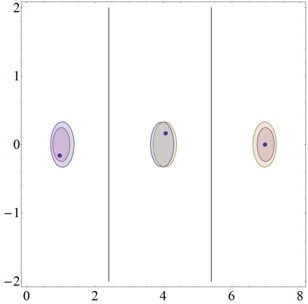


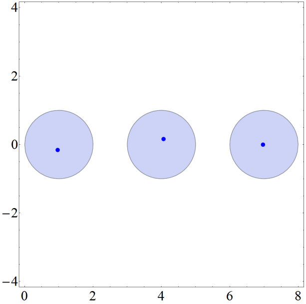


Rysunek: Odpowiednio zbiór Brauera i zbiór Gerszgorina macierzy H

Dokładnie jedna wartość własna w każdym kole Gerszgorina

$$I = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1/2 & 4 & i/2 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$



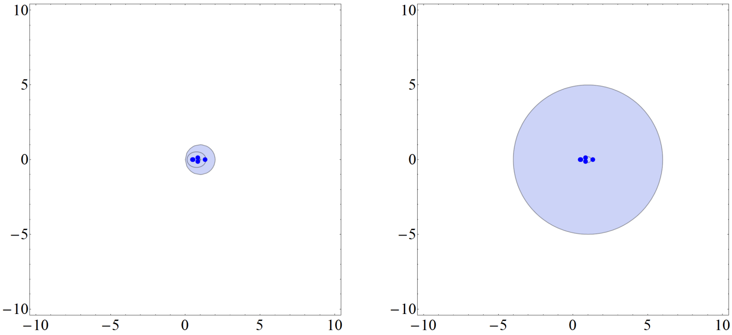


Rysunek: Odpowiednio zbiór Brauera i zbiór Gerszgorina macierzy I

Zbiór Brauera może być "dużo mniejszy" od zbioru Gerszgorina

$$J = \begin{bmatrix} 30 & 60 & 0 & 60 & 30 \\ 3/10 & 15 & 6/5 & 5/12 & 1/12 \\ 15/4 & 15/28 & 30 & 3/4 & 1/12 \\ 7/37 & 6/7 & 30/37 & 15 & 1/7 \\ 15/22 & 159/154 & 3 & 9/7 & 30 \end{bmatrix}$$

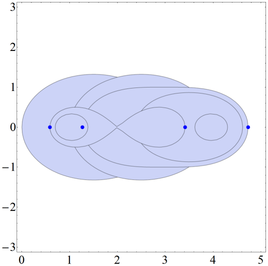
Zbiór Brauera może być "dużo mniejszy" od zbioru Gerszgorina

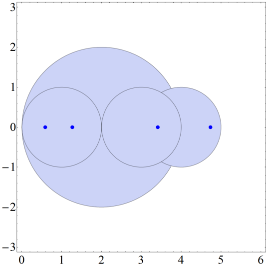


Rysunek: Odpowiednio zbiór Brauera i zbiór Gerszgorina macierzy J

Wszystkie wartości własne zlokalizowano na brzegach owali Cassiniego

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$





Rysunek: Odpowiednio zbiór Brauera i zbiór Gerszgorina macierzy K

Owale Cassiniego i zbiory Brauera

Wniosek

Dla dowolnego $\alpha \in [0,1]$, każda wartość własna macierzy $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ leży w co najmniej jednym z owali Cassiniego postaci:

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot |\lambda - a_{jj}| \leqslant \left(\sum_{k\neq i} |a_{ik}| \cdot \sum_{k\neq j} |a_{jk}|\right)^{\alpha} \left(\sum_{k\neq i} |a_{ki}| \cdot \sum_{k\neq j} |a_{kj}|\right)^{1-\alpha}$$

gdzie $1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j$.

Twierdzenie Cvetkovića

Oznaczenia

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ oraz $c_i = \sum_{j \neq i} |a_{ji}|$. Zdefiniujmy także dwa zbiory postaci $\mathcal{R} = \{i \in \{1, .., n\} : r_i > c_i\}$ oraz $\mathcal{C} = \{i \in \{1, .., n\} : r_i < c_i\}$.

Twierdzenie (Cvetković, Kostić, Bru, Pedroche)

Niech będzie dana macierz $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$ i niech λ będzie wartością własną tej macierzy. Wtedy istnieje indeks $i \in \{1, ..., n\}$ taki, że

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant min\{r_i, c_i\}$$

lub istnieje $i \in \mathcal{R}$ takie, że $c_i \neq 0$ oraz istnieje $j \in \mathcal{C}$ takie, że $r_j \neq 0$ oraz

$$\frac{|\lambda - a_{ii}|}{c_i} \left(\frac{|\lambda - a_{jj}|}{c_j} \right)^{\log_{\frac{c_j}{r_j}} \frac{r_i}{c_i}} \leqslant 1.$$

Twierdzenie Cvetkovića

Twierdzenie (Cvetković, Kostić, Bru, Pedroche) c.d.

Wtedy spektrum macierzy A zawiera się w sumie mnogościowej zbiorów:

$$|\lambda - a_{ii}| \leqslant min\{r_i, c_i\}$$

oraz

$$\frac{|\lambda - a_{ii}|}{c_i}\left(\frac{|\lambda - a_{jj}|}{c_j}\right)^{\log_{\frac{c_j}{r_j}} \frac{r_i}{c_i}} \leqslant 1.$$

Serdecznie dziękuję mojemu Promotorowi, Panu dr. hab. inż. Romanowi Witule za udzielnie merytorycznego wsparcia, a także pomocy na każdym etapie przygotowywania prezentacji.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ!

Bibliografia

1. R.S. Varga, *Geršgorin and His Circles*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 36. Springer-Verlag, Berlin 2004.
2. R.A. Horn, C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
3. W.W. Wojewodin, J.A. Kuzniecow, *Macierze i obliczenia*, Wydawnictwo Nauka, Moskwa 1984. (w języku rosyjskim)
4. S. Geršgorin, *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, Akademia Nauk ZSRR (1931), 749 - 754
5. R.S. Varga, *Geršgorin-type eigenvalue inclusion theorems and their sharpness*, ETNA 12 (2001), 113 - 133.
6. R.S. Varga, A. Kraustengl *On Geršgorin-type problems and ovals of Cassini*, ETNA 8 (1999), 15 - 20.
7. L. Cvetković, V. Kostić, R. Bru, F. Pedroche, *A simple generalization of Geršgorin theorem*, Advances in Computational Mathematics 2011