

W jakim wzorze odkrytym w XVII wieku występuje centralny współczynnik dwumianowy $\binom{2n}{n}$?
Wydedukuj z niego asymptotykę liczb $4^{-n}\binom{2n}{n}$.

Odpowiedź znajduje się na kolejnej stronie.

Odpowiedź. Chodzi o wzór Wallisa:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{(2k) \cdot (2k)}{(2k-1) \cdot (2k+1)},$$

gdzie:

$$\prod_{k=1}^n \frac{(2k) \cdot (2k)}{(2k-1) \cdot (2k+1)} = \frac{4^{2n}}{\binom{2n}{n}^2} \cdot \frac{1}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stąd już łatwo wyprowadzamy zależność asymptotyczną:

$$4^{-n} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

gdzie $n \rightarrow \infty$.