Kącik "łamania głowy"

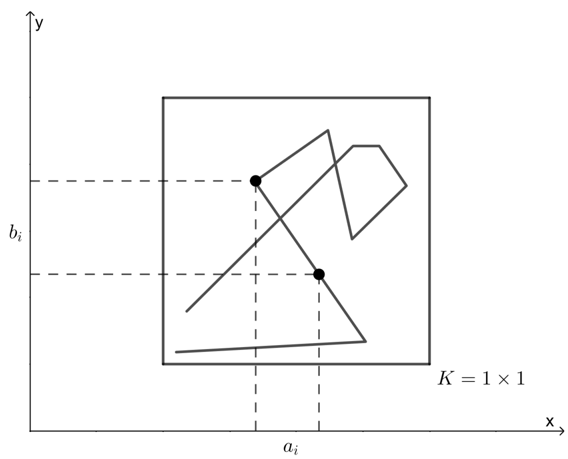
Problemy i problemiki na niwie matematyki (prezentujemy tu oryginalne i chwytliwe problematy świeżo co znalezione, jak też odkryte przed laty)

SKN Miłośników Historii Matematyki i Informatyki TRYSEKTOR

M932 "Kbahm" VIII, 1985

W kwadratowej klatce o boku 1m znajduje się anakonda o długości 10m. Pokazać, że w dowolnej chwili możemy jednym strzałem przestrzelić anakondę w co najmniej 6 miejscach (Anakondę można uważać za dowolną łamaną długości 10m położoną wewnątrz kwadratu o boku 1m. Strzał może być oddany w dowolnym kierunku.).

Rozwiązanie.



Dana jest łamana $l = \{l_1, \ldots, l_n\}$ położona wewnątrz kwadratu K, taka że

$$\sum_{i=1}^{n} l_i = 10.$$

Niech a_i, b_i będą długościami rzutów odcinków łamanej l odpowiednio na oś OX oraz oś OY. Czy jest możliwe i jeśli tak to kiedy, by

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \leq 5 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \leq 5 \end{cases} ?$$

Rozważymy dwie sytuacje:

1. Istnieje i, $1 \leq i \leq n$, takie że $a_i > 0$ i $b_i > 0$, wówczas

$$10 = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a^2 + b^2} < \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

skąd

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > 5 \quad \text{lub} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i > 5$$

a to oznacza, że istnieje odcinek dodatniej długości odpowiednio na osi x-ów lub osi y-ów, " nad którym" znajduje się co najmniej 6 odcinków łamanej l.

2. Dla każdego i, $1 \leq i \leq n$, $a_i = 0$ lub $b_i = 0$, wówczas

$$10 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a^2 + b^2} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

czyli

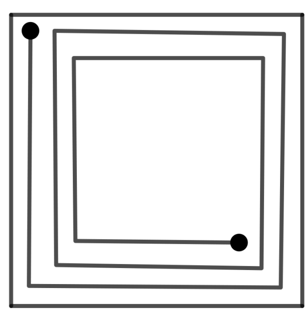
$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = 10,$$

gdy $\sum_{i=1}^{n} a_i > 5$ lub $\sum_{i=1}^{n} b_i > 5$, to tak jak w 1 przypadku istnieje odcinek dodatniej długości odpowiednio na osi x-ów lub osi y-ów, " nad którym" znajduje się co najmniej 6 odcinków łamanej l.

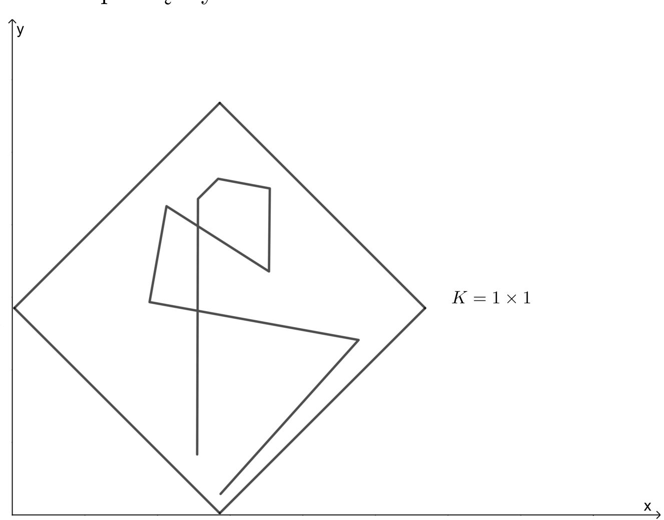
Może też zaistnieć sytuacja, gdy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 5 \quad \text{oraz} \quad \sum_{i=1}^{n} b_i = 5,$$

na przykład



Wówczas obracamy nasz układ współrzędnych XY o $45°$ w kierunku ruchu wskazówek zegara, to jest



W nowo powstałym układzie $X'Y'$ rzuty odcinków łamanej l na osie OX' i OY" oznaczamy a_i' oraz b_i'. Jak łatwo zauważyć, stale $a_i' > 0$ oraz $b_i' > 0$ i dostajemy przypadek 1. z układu OXY.