

# Kącik "łamania głowy"

Problemy i problemiki na niwie matematyki (prezentujemy tu oryginalne i chwytliwe problematy świeżo co znalezione, jak też odkryte przed laty)

SKN Miłośników Historii Matematyki i Informatyki TRYSEKTOR

Na płaszczyźnie danych jest  $n$  punktów. Gra polega na tym, że łączymy dwa dowolne punkty, niekoniecznie różne, linią ciągłą taką, by nie przechodziła przez żadne z pozostałych. Linie nie mogą się przecinać. Na linii łączącej wyróżniamy pewien punkt różny od końcowych, który odąd także uczestniczy w grze. Z każdego punktu mogą wychodzić najwyżej trzy linie. Przegrywa ten kto nie może już narysować żadnej linii.

- Dowieść, że gra zawsze kończy się.
- Znaleźć optymalną strategię dla  $n = 2$ .
- Znaleźć optymalną strategię dla dowolnego  $n \in \mathbb{N}$ .

*Rozwiązanie.*

ad. a)

Ustalmy pewne  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Załóżmy, że na płaszczyźnie jest  $n_0$  punktów. Przed każdym ruchem przyporządkujemy każdemu punktowi uczestniczącemu w grze jedną z czterech następujących liczb charakterystycznych:

0 – gdy punkt nie może już brać udziału w grze (czyli gdy wychodzą z niego 3 linie lub jest zablokowany)

1 – gdy może tylko jeszcze raz brać udział w grze

2 – gdy może jeszcze 2 razy brać udział w grze

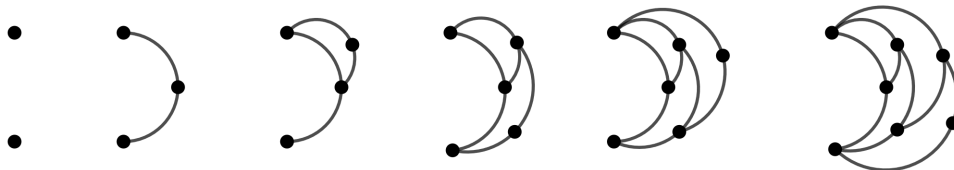
3 – gdy może 3 razy brać udział w grze

Oznaczmy przez  $S(k)$  sumę liczb charakterystycznych wszystkich punktów z gry przed  $k$ -tym krokiem gry. Pokażemy, że  $S(k+1) \leq S(k) - 1$ .

Istotnie, łącząc dwa punkty odejmujemy od  $S(k)$  liczbę 2, a wprowadzając jednocześnie jeden nowy punkt ale już z dwoma wychodzącymi z niego liniami dodajemy do  $S(k)$  co najwyżej 1. Zatem  $S(k+1) \leq S(k) - 2 + 1 = S(k) - 1$ .

Stąd też łatwo zauważyć, że maksymalna liczba ruchów dla danego  $n_0$  wynosi  $3n_0 - 1$  (gdy  $S(k) = 1$ , to gra jest już skończona).

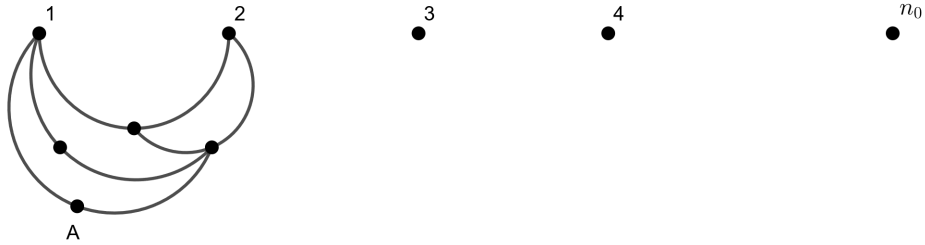
ad. b)



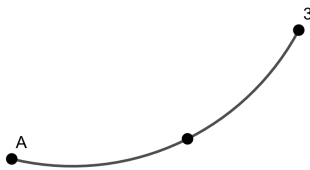
ad. c)



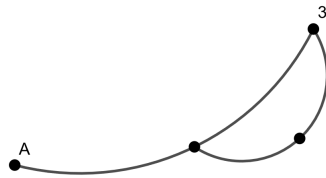
Wykonujemy 5 kroków jak w b):



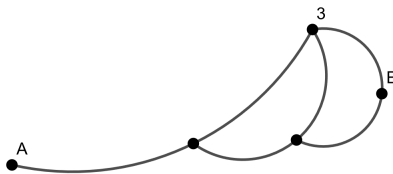
6 krok:



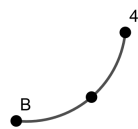
7 krok:



8 krok:



9 krok:



itd.

Z każdym kolejnym punktem mamy 3 kroki.