(Zadanie z kanadyjskiej olimpiady matematycznej)

W pewnej hali sportowej odbyły się zawody, na które złożyło się m-różnych konkurencji. W zawodach wzięło udział 3 zawodników: A, B, C. Wiadomo, że w każdej konkurencji obowiązywała ta sama punktacja $p_1 > p_2 > p_3 > 0$, $p_i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, oraz, że łączna suma punktów uzyskanych przez każdego z zawodników była następująca:

$$A - 22 \text{ pkt}, \quad B - 9 \text{ pkt}, \quad C - 9 \text{ pkt}.$$

Pytanie: kto zajął drugie miejsce w skoku wzwyż jeśli wiadomo, że zawodnik B wygrał bieg na 100 m.

Rozwiązanie.
Łatwo otrzymujemy równanie:

$$22 + 9 + 9 = m(p_1 + p_2 + p_3),$$

tj.

$$40 = m(p_1 + p_2 + p_3). \tag{1}$$

Ze względu na założenie o liczbach p_1, p_2, p_3 wiemy, że

$$p_1 + p_2 + p_3 \geqslant 3 + 2 + 1 = 6.$$

Możliwe są więc następujące przypadki:

m	$p_1 + p_2 + p_3$
2	20
4	10
5	8

(przypadek $m = 1$ odrzucamy zarówno ze względu na pytanie sugerujące rozegranie co najmniej dwóch konkurencji jak i ze względu na punktację $p_1 > p_2 > p_3$, bowiem dla $m = 1$ mielibyśmy $p_1 = 22$, $p_2 = p_3 = 9$).

- Jeśli $m = 2$, to $p_1 \geqslant 8$ (w przeciwnym razie $p_1 + p_2 + p_3 \leqslant 7 + 6 + 5 = 18 < 20$) skąd wobec tego, że B wygrał co najmniej jedną konkurencję i zdobył łącznie 9 punktów otrzymujemy, że $p_1 = 8$ i $p_3 = 1$. Stąd $p_2 = 20 - 8 - 1 = 11 > p_1$, co jest sprzeczne z założeniem. Tak więc na pewno $m > 2$.

- Gdyby $m = 4$, to $p_1 = 5$ lub $p_1 = 6$
(gdyby $p_1 < 5$, to $p_1 + p_2 + p_3 \leqslant 4+3+2 = 9 < 10$ i mamy sprzeczność z (1);
gdyby $p_1 > 6$, to $p_1 = 7, p_2 = 2, p_3 = 1$, stąd liczba punktów uzyskanych przez zawodnika B byłaby $\geqslant 7+1+1+1 = 10$ wbrew założeniu).
Przypuśćmy, że $p_1 = 6$. Ponieważ suma punktów uzyskanych przez zawodnika B równa się 9 i na nią składa się co najmniej jedna szóstka uzyskana w biegu na 100 m, więc $p_3 = 1$ a stąd $p_2 = 10 - 6 - 1 = 3$.
Skoro zawodnik B zajął 3 razy 3 miejsce w 4 rozegranych konkurencjach, to zawodnik C zajął w 3 konkurencjach co najmniej 2 miejsce, czyli w 4 rozegranych konkurencjach zdobył łącznie co najmniej $3+3+3+1 = 10$ punktów wbrew założeniom. Tym samym przypadek $p_1 = 6$ odrzucamy.
Przypuśćmy, że $p_1 = 5$. Wówczas $p_3 = 1$ i $p_2 = 4$ (sytuacja gdy $p_3 \geqslant 2$ jest niemożliwa, gdyż zawodnik B powinien wtedy uzyskać łącznie co najmniej $5+2+2+2 = 11$ punktów). Oczywiście zawodnik B uzyskuje w 4 konkurencjach albo $5+1+1+1 = 8$ punktów, albo co najmniej $5+4+1+1 = 11$ pktów co jest sprzeczne z założeniem.
Przypadek $p_1 = 5$ również odrzucamy.

- Pozostaje sytuacja, gdy $m = 5$. Wówczas $p_1 + p_2 + p_3 = 8$ i musi być $p_1 = 4$ lub $p_1 = 5$
(gdyby $p_1 < 4$, to $p_1 + p_2 + p_3 \leqslant 3+2+1 = 6 < 8$ sprzeczność,
a gdyby $p_1 > 5$, to $p_1 + p_2 + p_3 \geqslant 6+2+1 = 9 > 8$ sprzeczność).
Gdyby $p_1 = 4$, to $p_2 = 3$ i $p_3 = 1$ i jak łatwo można sprawdzić zawodnik B nie mógłby uzyskać swoich 9 punktów w pięciu konkurencjach, gdyż:
$$4+1+1+1+1 = 8 < 9,$$
$$4+3+1+1+1 = 10 > 9.$$
Zatem $p_1 = 5$, $p_2 = 2$ i $p_3 = 1$.
Sytuacja, ta odpowiada następującym rozkładom pktów:
$$\begin{array}{lcll} A & – & 4 \times p_1, & 1 \times p_2, \\ B & – & 1 \times p_1, & 4 \times p_3, \\ C & – & 4 \times p_2, & 1 \times p_3, \end{array}$$
co jest jednoznaczne!
Skoro B uzyskał pierwsze miejsce w biegu na 100 m, to jak widać z powyższego rozkładu, w konkurencji tej A był drugi, a C trzeci. W skoku wzwyż triumfował zawodnik A, B był trzeci a zatem drugie miejsce zajął zawodnik C.

$\square$