Zadanie o kameleonach

„Квант" M914, III 1985

Na pewnej wyspie żyje: 13 zielonych, 15 niebieskich i 17 czerwonych kameleonów. Jeśli spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, to jednocześnie zmieniają kolor na trzeci. Czy może się tak zdarzyć, że po pewnej liczbie spotkań na wyspie będą tylko kameleony jednego koloru?

Rozwiązanie (pochodzi z czasopisma „Квант", VII 1958, str. 46). Taka sytuacja nie może się zdarzyć. Powinniśmy udowodnić, że z trójki $(13, 15, 17)$ przy pomocy operacji opisanych w założeniach zadania, to jest zwiększenia jednej z liczb o 2 przy jednoczesnym zmniejszeniu dwóch pozostałych o 1 (jeśli są one dodatnie), nie można otrzymać z żadnej z trójek postaci:

$$(45, 0, 0), \quad (0, 45, 0), \quad (0, 0, 45).$$

W tym celu wprowadzimy na trójkach (a, b, c) liczb całkowitych pewien niezmiennik, to jest wielkość określoną na trójkach liczb całkowitych (a, b, c) nie zmieniającą się przy operacji opisanej na początku rozwiązania i taką, która przyjmowałaby różne wartości dla trójki $(13, 15, 17)$ i dla trójek:

$$(45, 0, 0), \quad (0, 45, 0), \quad (0, 0, 45).$$

Takim niezmiennikiem jest na przykład reszta z dzielenia przez 3 różnicy $a - b$ dwóch pierwszych liczb trójki (a, b, c). Rzeczywiście przy „zmianie koloru kameleonów" liczby a i b mogą zmienić się na:

$$\begin{array}{ccc} a-1 & \text{i} & b-1, \\ a+2 & \text{i} & b-1, \\ a-1 & \text{i} & b+2. \end{array}$$

W pierwszym przypadku różnica nie zmienia się, a w dwóch pozostałych zmienia się o 3 i reszta z dzielenia przez 3 nie zmienia się. Na koniec pozostaje zauważyć, że dla trójki $(13, 15, 17)$ reszta z dzielenia $13 - 15$ przez 3 jest równa 1, a dla trójek:

$$(45, 0, 0), \quad (0, 45, 0), \quad (0, 0, 45)$$

jest równa 0.