

Zadanie

Wśród danych 12 kul, dokładnie jedna ma masę różną od pozostałych jedenastu, które mają jednakową masę. Przy pomocy 3 wazeni na wadze dwuszalkowej należy wyznaczyć tę jedną kulę, różniącą się masą (ciężarem) od pozostałych 11 kul.

Rozwiązanie

- Gdy $4 \text{ kule} = 4 \text{ kule}$, (znaki $=, >, <$ dotyczą ciężaru ważonych kul; ponadto, umawiamy się, że liczba z lewej strony odpowiedniego znaku dotyczy zawsze pierwszej szalki, z prawej zaś drugiej szalki), to z pozostałych 4 wybieramy 2,
 - gdy $1 = 1$, to wymieniamy jedną z tych kul na dowolną z pozostałych dwóch;
 - gdy $1 > 1$, to tak jak poprzednio, wymieniamy jedną z tych kul na dowolną z dwóch pozostałych.
- Gdy $4 \text{ kule} > 4 \text{ kule}$, to drugie ważenie ma postać:

pierwsza szalka	druga szalka
1 kula	2 kule
+3 kule z pozostałych 4 kul (tj. kul, które nie brały udziału w pierwszym ważeniu)	+2 kule (czyli po 2 kule z każdej szalki z pierwszego ważenia)

- Gdy $1 + 3 > 2 + 2$, to kula różniąca się ciężarem od pozostałych 11 kul, pozostała nieruszona na szalce z pierwszego ważenia. Zatem jest ona albo kulą pozostałą na pierwszej szalce albo wśród 2 kul pozostałych na drugiej szalce. Trzecie ważenie polega na położeniu na jednej szalce dowolnych dwóch kul, które nie brały udziału w drugim ważeniu (mają ten sam ciężar!), na drugiej zaś szalce po jednej kuli z pierwszej i drugiej szalki, które brały udział w obydwu ważeniach a ściślej tej, która pozostała na pierwszej szalce w pierwszym ważeniu + jedną z dwóch, które brały udział w pierwszym i drugim ważeniu, pozostając w obydwu przypadkach na drugiej szalce.
Gdy $2 = 1 + 1$, to szukana kula jest pozostałą z dwóch kul.
Gdy, np. $2 > 1 + 1$, to szukana kula jest lżejsza od pozostałych

11 i jest tą z dwójki kul uczestniczących w pierwszym i drugim ważeniu na drugiej szalce, spośród których dokładnie jedna kula przeszła do trzeciego ważenia.

Gdy $2 < 1 + 1$, to szukana kula jest cięższa od pozostałych 11 i jest tą kulą z pierwszej szalki z pierwszego i drugiego ważenia, która przeszła do trzeciego ważenia.

- Gdy $1 + 3 = 2 + 2$, to kula o ciężarze różnym od ciężaru pozostałych 11 znajduje się wśród 3 kul usuniętych z szalek po pierwszym ważeniu;

załóżmy przy tym, że pamiętamy na jakich były one szalkach

$$\begin{array}{cc} 1 \text{ kula} & 2 \text{ kule} \\ (*) \text{ pierwsza} & \text{druga} \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix} \\ \text{szalka} & \text{szalka.} \end{array}$$

Wówczas trzecie ważenie wygląda w następujący sposób:

$$\begin{array}{cc} \text{dowolne 2 kule} & \text{na drugiej} \\ \text{z drugiego ważenia} & \text{szalce po jednej} \\ \text{na pierwszą szalkę} & \text{kuli z } (*) \text{ i z } \begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}. \end{array}$$

Gdy $2 = 1 + 1$, to szukana kula jest pozostałą z $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$;

gdy, np. $2 > 1 + 1$, to szukana kula jest lżejsza od pozostałych, pamiętając wynik pierwszego ważenia:

$$\begin{array}{cc} 4 & > & 4 \\ \text{pierwsza} & & \text{druga} \\ \text{szalka} & & \text{szalka} \end{array}$$

wnioskujemy, że szukaną jest ta z kul $\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$, która wzięta została do trzeciego ważenia;

gdy $2 < 1 + 1$, to szukana kula jest cięższa od pozostałych, a ponieważ za pierwszym ważeniem $4 > 4$, to szukaną jest kula $(*)$.

- Gdy $1 + 3 < 2 + 2$, to kula o innym ciężarze zmieniła swoje miejsce na inną szalkę, czyli jest wśród dwóch kul z pierwszej szalki wziętych do drugiego ważenia. Do trzeciego ważenia bierzemy jedną kulę spośród tych dwóch kul i dowolną kulę spośród pozostałych 10:

$$\text{gdy } 1 = 1,$$

to szukana, jest pozostałą z dwóch;

$$\text{gdy } 1 > 1,$$

to szukana kula jest cięższa od pozostałych, co kończy wybór.