Liczby doskonałe i liczby zaprzyjaźnione – kilka faktów historycznych.

Roman Wituła Michał Różański Barbara Smoleń-Duda
Adrian Smuda*

wrzesień 2020

Najpierw przypomnijmy odpowiednie definicje.

Definicja 1. Liczba naturalna n jest liczbą doskonałą, jeśli jest sumą wszystkich swoich dzielników właściwych.

Definicja 2. Liczby naturalne A, B, gdzie $A \neq B$, są zaprzyjaźnione, jeśli suma wszystkich dzielników właściwych liczby A jest równa B i odwrotnie, suma wszystkich dzielników właściwych liczby B jest równa A.

Uwaga 1. W starszej literaturze angielskiej znajdziemy termin „friendly numbers". Natomiast we współczesnych opracowaniach utrwalił się termin „amicable numbers", co historycznie odpowiada używanemu przez Eulera łacińskiemu terminowi „de numeris amicabilibus".

Pitagorejczycy znali trzy najmniejsze liczby doskonałe:

$$6, \quad 28 \quad \text{i} \quad 496$$

oraz najmniejsze liczby naturalne A, B tworzące parę liczb zaprzyjaźnionych:

$$A = 220 \quad \text{i} \quad B = 284.$$

Ostatnie twierdzenie IX księgi Elementów Euklidesa głosi, że:

Twierdzenie 1. Jeśli liczba $2^n - 1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, jest liczbą pierwszą, to liczba $2^{n-1}(2^n - 1)$ jest doskonała.

*Pan Adrian, od października 2020 roku, rozpoczął naukę na II stopniu studiów matematycznych na wydziale Matematyki Stosowanej Politechniki Śląskiej.

Leonhard Euler (1707-1783) udowodnił, że wszystkie parzyste liczby doskonałe są tej postaci. Nadal nie wiemy, czy istnieje nieparzysta liczba doskonała.

Zdecydowanie więcej emocji (to jest „mentalnych trudności") dostarczyły badaczom (nie tylko matematykom) liczby zaprzyjaźnione. Najpierw w IX wieku arabski matematyk al-Sabi Thabit ibn Qurrah al-Harrani, nazywany krótko Sabitem,[1] odkrył metodę otrzymywania liczb zaprzyjaźnionych, którą we współczesnym sformułowaniu podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Jeżeli każda z trzech liczb naturalnych:

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \quad q = 3 \cdot 2^n - 1 \quad \text{oraz} \quad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

jest liczbą pierwszą, to liczby:

$$A = 2^n pq \quad \text{i} \quad B = 2^n r$$

są liczbami zaprzyjaźnionymi.

Od razu zauważmy, że dla $n = 2$, $p = 5$, $q = 11$ oraz $r = 71$ dostajemy parę liczb zaprzyjaźnionych, znaną już pitagorejczykom, czyli:

$$A = 220 \quad \text{i} \quad B = 284.$$

Przy pomocy twierdzenia Sabita można jeszcze otrzymać dwie następujące pary liczb zaprzyjaźnionych:

- dla $n = 4$, $p = 23$, $q = 47$ oraz $r = 1\,151$, co generuje parę:

$$A = 17\,296 \quad \text{i} \quad B = 18\,416;$$

- dla $n = 7$, $p = 191$, $q = 383$ oraz $r = 73\,727$, co generuje parę:

$$A = 9\,363\,584 \quad \text{i} \quad B = 9\,437\,056.$$

Jednak nie wiadomo, czy Sabit wykorzystał swoje twierdzenie do wyznaczenia liczb zaprzyjaźnionych dla $n > 2$! Odkrycie drugiej pary liczb zaprzyjaźnionych (tej dla $n = 4$) nieomal do końca lat 70-tych XX wieku przypisywano Fermatowi. Okazało się, że niesłusznie, albowiem arabscy naukowcy upowszechnili w tym czasie informację, że w jednym, ze świeżo odkrytych rękopisów marokańskiego uczonego ibn al-Banny (1256-1321) zostało napisane:

[1] Sabit był też lekarzem, astronomem i tłumaczem, który mieszkał w Bagdadzie na dworze swojego patrona kalifa al-Mutadida, co ciekawe nie był muzułmaninem! Do końca życia był Sabianinem (Harrańskim Sabianinem).

Liczby 17 296 *i* 18 416 *są zaprzyjaźnione; jedna z nich jest z niedomiarem, a druga z nadmiarem.*[2] *Allah jest wszechmogący.*
Trzecią parę liczb zaprzyjaźnionych (tę dla $n = 7$) odkrył Kartezjusz.

Kolejny ważny krok w tematyce liczb zaprzyjaźnionych przypada na początek XVII wieku, kiedy to za sprawą Fermata w 1636 roku i Kartezjusza w 1638 roku – niezależnie od siebie i niezależnie od Sabita – ponownie zostaje odkryte twierdzenie Sabita. Obwieszcza o tych odkryciach w jednej ze swoich książek ojciec Marin Mersenne, co jak na tamte czasy jest niewątpliwie wielką nobilitacją. W swoich badaniach Fermat i Kartezjusz posłużyli się ważną funkcją arytmetyczną $\sigma(n)$ opisującą sumę dzielników naturalnych danej liczby n dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Przypomnijmy dwie ważne własności tej funkcji:

$$\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b) \tag{1}$$

dla dowolnych względnie pierwszych $a, b \in \mathbb{N}$;

$$\sigma(p^n) = 1 + p + \ldots + p^n = \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

dla dowolnej liczby pierwszej p. Oczywiście suma dzielników właściwych danej liczby $a \in \mathbb{N}$ jest równa $\sigma(a) - a$. Stąd wynika następujący opis analityczny pary a, b liczb zaprzyjaźnionych:

$$\sigma(a) - a = b \quad \text{oraz} \quad \sigma(b) - b = a \tag{3}$$

i w konsekwencji warunek, jaki para a, b liczb zaprzyjaźnionych musi spełniać:

$$\sigma(a) = a + b = \sigma(b). \tag{4}$$

Przyjmując oznaczenia jak w twierdzeniu Sabita, łatwo znajdujemy:

$$\sigma(A) = (2^{n+1} - 1)(p + 1)(q + 1), \quad \sigma(B) = (2^{n+1} - 1)(r + 1),$$

przy czym:

$$(p + 1)(q + 1) = 9 \cdot 2^{2n-1} = r + 1.$$

Ponadto mamy:

$$A + B = 2^n(pq + r)$$

a przy tym:

$$2^n(pq + r) = (2^{n+1} - 1)(r + 1) \Leftrightarrow pq + r = 9 \cdot 2^{n-1}(2^{n+1} - 1),$$

co weryfikujemy bezpośrednio. Równocześnie daje to dowód twierdzenia Sabita.

Ponieważ Fermat w trakcie poszukiwań liczb doskonałych i zaprzyjaźnionych posługiwał się opracowanymi przez siebie tablicami rozkładu liczb $\sigma(p^n)$ na czynniki pierwsze, rzecz jasna w oparciu o wzór (2), więc jest nieomal pewne, że w ten sposób odkrył „małe twierdzenie Fermata".

[2] Względem liczby 17 856 o ±560.

Twierdzenie 3. Jeśli $n+1$ jest liczbą pierwszą, to $n+1$ jest dzielnikiem liczby p^n-1 dla każdego $p \in \mathbb{N}$, takiego że $(n+1,p)=1$.

Po tych płodnych latach trzeba było poczekać na pojawienie się Leonharda Eulera, aby w badaniach dotyczących liczb zaprzyjaźnionych dokonał się ogromny postęp. Euler odkrył 59 par liczb zaprzyjaźnionych i jest autorem pięciu różnych metod wyznaczania par liczb zaprzyjaźnionych. Jedna z tych metod stanowi uogólnienie metody opisanej w twierdzeniu Sabita:

Twierdzenie 4 (Euler)**.** Niech $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ oraz $g := 2^{n-m}+1$. Jeśli liczby:

$$p = 2^m g - 1, \quad q = 2^n g - 1 \quad \text{oraz} \quad r = 2^{n+m} g^2 - 1$$

są liczbami pierwszymi, to liczby:

$$A = 2^n pq \quad \text{oraz} \quad B = 2^n r$$

są liczbami zaprzyjaźnionymi.

Dowód przebiega podobnie jak dowód twierdzenia Sabita.

Zauważmy jeszcze, że przypadek gdy $n - m = 1$ daje twierdzenie Sabita. Niestety Euler nie był w stanie wykorzystać tego twierdzenia do odkrycia nowej pary liczb zaprzyjaźnionych, albowiem dysponował jedynie tablicami liczb pierwszych $\leqslant 100\,000$. Dopiero Legendre (1830) i niezależnie Czebyszew (1851) bazując na nowych testach pierwszości liczb naturalnych odkryli na mocy powyższego twierdzenia Eulera kolejną parę liczb zaprzyjaźnionych. Współcześnie wykorzystując komputer również na bazie twierdzenia Eulera odkryto wiele nowych par liczb zaprzyjaźnionych.

Warto też nadmienić, że nie wiadomo, czy par liczb zaprzyjaźnionych jest skończenie wiele. Paul Erdős udowodnił, że stosunek ilości liczb zaprzyjaźnionych nie większych od x do x, dąży do zera, gdy x dąży do nieskończoności. Natomiast Carl Pomerance (zob. prace [4] i [5]) wykazał, że w przypadku, gdyby par liczb zaprzyjaźnionych było nieskończenie wiele, to szereg utworzony z odwrotności wszystkich liczb tworzących pary liczb zaprzyjaźnionych jest zbieżny.

Literatura

[1] Borho W., Zagier D., Rohlfs J., Kraft H., Jantzen J.C., *Lebendige Zahlen – Fünf Exkursionen*, Birkhäuser, Basel 1981 (korzystano z tłumaczenia na rosyjski, wyd. Mir, Moskwa 1985).

[2] Katz V.J. (ed.), *Mathematics of Medieval Europe and North Africa*, Princeton University Press, Princeton 2016.

[3] Mollin R.A., *Fundamental Number Theory with Applications*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton 2008.

[4] Pomerance C., *On the distribution of amicable numbers*, J. reine angew. Math. **293/294** (1977), 217–222.

[5] Pomerance C., *On the distribution of amicable numbers. II*, J. reine angew. Math. **325** (1981), 183–188.