

Trójkąty Stirlinga

Edyta Hetmianiok

Barbara Smoleń

Roman Wituła

Streszczenie—Praca poświęcona jest elementarnej dyskusji trójkątów liczb Stirlinga pierwszego rodzaju oraz liczb r -Stirlinga. Celem badań było wyodrębnienie ciągów liczbowych powiązanych z tymi trójkątami, zweryfikowanie ich obecności w OEIS, próba wygenerowania pewnych własności tych liczb. Uzupełniono też o nowe wyniki pracę [3], gdzie przedmiotem badań był trójkąt liczb będących transformacją dwumianową liczb k -Fibonacci.

I. WPROWADZENIE

Bezpośredni wpływ na powstanie tej pracy miał artykuł [10], który zaintrygował nas i właściwie narzucił temat badań. Zainteresował nas stan wiedzy na temat trójkątów Pascala dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju i liczb r -Stirlinga pierwszego rodzaju. Celem badań było wyodrębnienie ciągów liczbowych powiązanych z tymi trójkątami (chodzi przede wszystkim o ciągi sum elementów stojących w wierszach i wzdłuż antyprzekątnych danego trójkąta). Chodziło też o zweryfikowanie ich obecności w OEIS oraz próbę wygenerowania pewnych własności tych liczb. Warto podkreślić, że uzupełniono o zupełnie nowe wyniki pracę Sergio Falcona [3], dotyczącą trójkąta liczb będących transformacją dwumianową liczb k -Fibonacci.

II. TRÓJKĄT STIRLINGA

Rozpoczniemy od przedstawienia definicji liczb Stirlinga pierwszego rodzaju.

Definicja 2.1: Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju, opisują liczbę permutacji na zbiorze n -elementowym mających k cykli (tzn. permutacji będących złożeniem dokładnie k cykli rozłącznych). Liczby te nie posiadają jednej standardowej notacji, a do ich zapisu używa się jednego z następujących symboli:

- $s(n, k)$,
- $S_n^{(k)}$,
- $S_1(n, k)$,
- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$.

W tej pracy będziemy używać ostatniego z podanych symboli.

Będziemy posługiwać się tu jeszcze jedną, alternatywną definicją liczb Stirlinga pierwszego rodzaju $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, a mianowicie:

Definicja 2.2:

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ = sumie wszystkich możliwych iloczynów $(n - k)$ różnych liczb całkowitych wziętych spośród n - początkowych liczb całkowitych nieujemnych, tj. spośród liczb $0, 1, \dots, n - 1$.

Mamy więc:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} &\equiv 0, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \equiv (n - 1)!, \\ \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} &\equiv \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n-1 \\ i \neq k}} i = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k} = (n-1)!H_{n-1}, \\ \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2}n(n-1), \quad \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^3, \end{aligned}$$

gdzie H_{n-1} oznacza $(n - 1)$ -szą liczbę harmoniczną, czyli $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Przyjmujemy też: $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} := 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że z tej definicji niemal natychmiast, po zmnożeniu jednomianów stojących po lewej stronie, wynika równość:

$$x(1+x)(2+x)\dots(n-1+x) = x^{\bar{n}} := \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \quad (1)$$

która była przyjęta oryginalnie przez Jamesa Stirlinga w jego monografii *Methodus Differentialis* (1730r.) jako definicja liczb Stirlinga pierwszego rodzaju. Iloczyn jednomianów po lewej stronie równości (1) określa dzisiaj tzw. symbol Pochhammera.

Dla porównania ze wzorem (1) mamy następujący powszechnie znany wzór dwumianowy Newtona:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, \quad (2)$$

który opisuje funkcję tworzącą współczynników dwumianowych.

Zauważmy, że z definicji 2.2 łatwo można wyprowadzić wzór (zależność rekurencyjną dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju):

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \quad (3)$$

Innymi słowy, wyborom $(n - k)$ różnych liczb spośród n -początkowych liczb całkowitych nieujemnych odpowiada suma wyborów $(n-1) - (k-1) = n - k$ różnych liczb spośród $(n - 2)$ - początkowych liczb całkowitych nieujemnych oraz wyborów $(n-1) - k = n - k - 1$ różnych liczb spośród $(n - 2)$ - początkowych liczb całkowitych nieujemnych z dołączoną liczbą $n - 1$.

Skonstruujmy teraz trójkąt Pascala dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju, który dalej będziemy nazywać trójkątem Stirlinga pierwszego rodzaju:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} := 1 \\
& & & & & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
& & & & & & \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
& & & & & & \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\
& \dots & & \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

czyli następujący trójkąt liczbowy:

$$\begin{array}{l}
\text{zerowy poziom} \longrightarrow 1 \\
\text{pierwszy poziom} \longrightarrow 0 \quad 0!=1 \\
\text{drugi poziom} \longrightarrow 0 \quad 1!=1 \quad 1 \\
\text{trzeci poziom} \longrightarrow 0 \quad 2!=2 \quad 3 \quad 1 \\
\text{czwarty poziom} \longrightarrow 0 \quad 3!=6 \quad 11 \quad 6 \quad 1 \\
\text{piąty poziom} \longrightarrow 0 \quad 4!=24 \quad 50 \quad 35 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

Stąd jak też na podstawie wzorów (1) i (3) łatwo wynika następujący wzór sumacyjny:

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n! = (n-1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} = n \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dla kontrastu, z trójkąta Pascala dla współczynników dwumianowych (będziemy nazywać go również klasycznym trójkątem Pascala), mamy następujący wzór sumacyjny:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k},$$

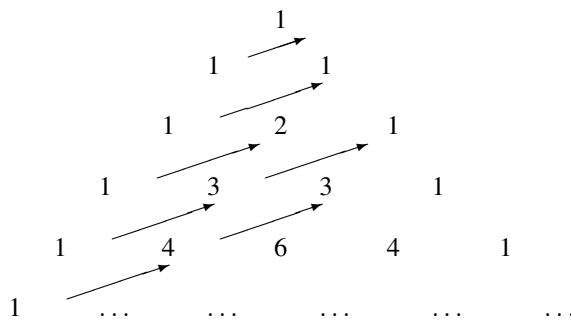
który oczywiście wynika też łatwo z klasycznej zależności rekurencyjnej (odpowiednika wzoru (3) dla współczynników dwumianowych):

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

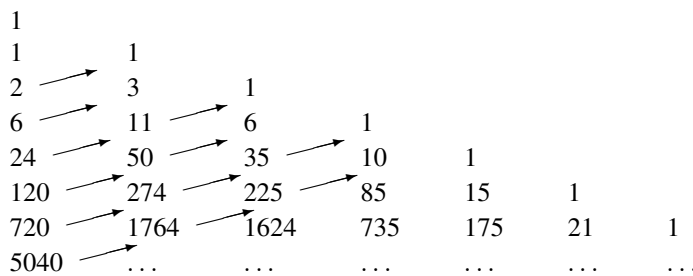
Wykonując w trójkącie Pascala sumowanie po antyprzekątnych otrzymujemy kolejny nieoczekiwany wzór (zobacz [8], str. 155-157):

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k},$$

gdzie F_n oznacza n -tą liczbę Fibonacciego.



Z kolei jeśli w trójkącie Stirlinga pierwszego rodzaju wykonamy sumowanie wzdłuż antyprzekątnych jak na następującym rysunku (pierwsza kolumna, zawierająca zera i jedną jedynkę na poziomie zerowym, została pominięta):



to dostajemy ciąg:

$$\begin{array}{l}
1 + 0 = 1, \\
2 + 1 = 3, \\
6 + 3 = 9, \\
24 + 11 + 1 = 36, \\
120 + 50 + 6 = 176, \\
720 + 274 + 35 + 1 = 1030, \\
5040 + 1764 + 225 + 10 = 7039, \\
\text{itd.}
\end{array}$$

to jest ciąg liczb naturalnych o numerze A237653 z encyklopedii Sloane'a OEIS. Innymi słowy, mamy:

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-2 \\ 2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 2r, \\ (r+1)!, & \text{gdy } n = 2r+1, \end{cases} = A237653(n)$$

dla każdego $n = 1, 2, \dots$

Uwaga 2.1: W klasycznym trójkącie Pascala liczby na danym poziomie n (poczynając od zerowego) stanowią współczynniki rozwinięcia w danej bazie liczbowej b liczby $(b+1)^n$ (zakładamy, że wszystkie współczynniki na poziomie n są $\leq b$), co wynika ze wzoru dwumianowego (2).

Z kolei w trójkącie Stirlinga pierwszego rodzaju liczby na danym poziomie n (poczynając od zerowego) stanowią współczynniki rozwinięcia w danej bazie liczbowej b liczby $\prod_{k=0}^{n-1} (bk+1)$ (przy założeniu, że wszystkie współczynniki na poziomie n są $\leq b$), co wynika ze wzoru (1) (należy podstawić za $x = \frac{1}{b}$ i pomnożyć obustronnie przez 10^n).

Co ciekawe, Sloane w OEIS, odnotowuje ciągi:

$$A144773(n) = \prod_{k=0}^{n-1} (10k+1), \quad A008548(n) = \prod_{k=0}^{n-1} (5k+1),$$

$$A007559(n) = \prod_{k=0}^{n-1} (3k+1).$$

Uwaga 2.2: Sergio Falcon w artykule [3] rozważa trójkąt T współczynników wielomianów:

$$p_n(k) := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} F_{k,n-j}, \quad n \in \mathbb{N},$$

które są transformatą dwumianową wierszy następującego trójkąta liczb k -Fibonacci, gdzie $F_{k,n}$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}_0$

			$F_{k,0}$				
			$F_{k,1}$		$F_{k,0}$		
		$F_{k,2}$	$F_{k,1}$		$F_{k,0}$		
	$F_{k,3}$	$F_{k,2}$	$F_{k,1}$		$F_{k,0}$		
...		

Mamy

$$F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}, \quad F_{k,0} = 0, \quad F_{k,1} = 1,$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Następujące wyniki stanowią uzupełnienie pracy Falcona [3]. Zauważyliśmy, że wielomiany $p_n(k)$ spełniają następującą podwójną zależność rekurencyjną.

$$\begin{cases} p_{n+1}(k) = (k+1)p_n(k) + q_n(k), \\ q_{n+1}(k) = p_n(k) + q_n(k), \end{cases}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$, gdzie $p_1(k) = q_1(k) \equiv 1$, $p_2(k) = k+2$, $q_2(k) \equiv 2$.

Stąd, po wykonaniu prostych przekształceń, dostajemy zależność rekursywną dla wielomianów $p_n(k)$:

$$p_{n+1}(k) = 1 + kp_n(k) + \sum_{j=1}^n p_j(k), \quad n \in \mathbb{N}$$

oraz zależność rekurencyjną

$$p_{n+2}(k) = (k+2)p_{n+1}(k) - kp_n(k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Istotnie mamy (dla przejrzystości przekształceń będziemy pomijać argument k , to znaczy przyjmujemy oznaczenia $p_n := p_n(k)$ oraz $q_n := q_n(k)$):

$$\begin{cases} p_{n+1} = (k+1)p_n + q_n, \\ p_{n+2} = (k+1)p_{n+1} + q_{n+1}, \end{cases}$$

skąd po obustronnym odjęciu stronami i zastosowaniu zależności $q_{n+1} = p_n + q_n$ znajdujemy

$$\begin{aligned} p_{n+2} - p_{n+1} &= (k+1)(p_{n+1} - p_n) + (q_{n+1} - q_n) = \\ &= (k+1)p_{n+1} - kp_n, \end{aligned}$$

to jest

$$p_{n+2} = (k+2)p_{n+1} - kp_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

A ponieważ $q_{n+1} - q_n = p_n$, więc:

$$q_{n+1} - q_1 = \sum_{j=1}^n p_j = p_{n+1} - kp_n - 1,$$

skąd:

$$q_{n+1} = p_{n+1} - kp_n = p_{n+2} - (k+1)p_{n+1}.$$

Ponadto mamy

$$p_{n+2} = (k+2)p_{n+1} - kp_n,$$

to jest:

$$q_{n+3} - q_{n+2} = (k+2)(q_{n+2} - q_{n+1}) - k(q_{n+1} - q_n),$$

czyli:

$$q_{n+3} = (k+3)q_{n+2} - 2(k+1)q_{n+1} + kq_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Trójkąt T ma postać

1							
1	2						
1	3	4					
1	4	8	8				
1	5	13	20	16			
1	6	19	38	48	32		
1	7	26	63	104	112	64	
1	8	34	96	192	272	256	128
1

Zauważyliśmy również, że sumę elementów antyprzekątnych trójkąta T tworzą trzy znane ciągi występujące w OEIS. Najpierw pełny ciąg:

$$\{1, 1, 3, 4, 9, 14, 28, 47, 89, 155, 286, \dots\} = A006053(n),$$

który spełnia następującą zależność rekurencyjną

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3},$$

gdzie $A006053(n) := a_n$, $n = 1, 2, \dots$ oraz ciągi otrzymane przez bisekcję ciągu $\{a_n\}$:

$$\begin{aligned} \{a_{2n-1}\} &= \{1, 3, 9, 28, 89, 286, \dots\} = A094790(n), \\ \{a_{2n}\} &= \{1, 4, 14, 47, 155, \dots\} = A094789(n), \end{aligned}$$

które spełniają tę samą zależność rekurencyjną rzędu trzeciego:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Uwaga 2.3: W kontekście dyskutowanych w tym rozdziale problemów warto jeszcze wspomnieć o liczbach Narayany zdefiniowanych w następujący sposób (zobacz [5]):

$$N(0, 0) = 1, \quad N(n, 0) = 0$$

$$N(n, k) = \frac{1}{n} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1}, \quad k, n \in \mathbb{N}, \quad k \leq n.$$

Tworząc trójkąt Narayany znajdujemy jeszcze inny piękny wynik. Otóż sumy elementów w wierszach trójkąta Narayany są równe liczbom Catalana:

$$\sum_{k=1}^n N(n, k) = C_n.$$

Sumowanie po antyprzekątnych trójkąta Narayana daje uogólnione liczby Catalana. Jest to ciąg A004148(n) w OEIS to jest

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} N(n-k, k+1) = C_n^*$$

gdzie $C_{n+1}^* = C_n^* + \sum_{k=1}^{n-1} C_k^* C_{n-1-k}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

III. TRÓJKĄT R-STIRLINGA PIERWSZEGO RODZAJU

Korzystając z analogicznych własności liczb r -Stirlinga otrzymujemy nieco ogólniejsze wyniki. Liczby r -Stirlinga pierwszego rodzaju są zdefiniowane następująco:

Definicja 3.1: Przyjmujemy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= 0, \quad n < r, & \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \delta_{k,r}, \quad n = r \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r, & n > r, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie δ_{kr} oznacza deltę Kroneckera. Przyjmujemy też: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 := \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.

Kombinatoryczny opis tych liczb przedstawiony został w pracy [1]. I tak, liczba $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$ - oznacza ilość permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ będących złożeniem dokładnie k - cykli parami rozłącznych i takich, że liczby $1, 2, \dots, r$ należą do różnych cykli.

Z opisu tego wynika że:

$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r =$ liczbie wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ mających liczby $1, \dots, r$ w różnych, parami rozłącznych cyklach.

Z definicji liczb r -Stirlinga pierwszego rodzaju łatwo otrzymujemy również zależność rekurencyjną:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= (n-1) \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r, \end{aligned} \quad (6)$$

dla każdego $r \geq 1$, która jest uogólnieniem tożsamości (4). Można sprawdzić, że wtedy:

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \frac{n!}{r!},$$

dla $n \geq r$. Broder w [1] podał postać funkcji tworzącej dla liczb r -Stirlinga pierwszego rodzaju:

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r x^k = \begin{cases} x^r (x+r)^{n-r}, & n \geq r \geq 0, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie,} \end{cases} \quad (7)$$

gdzie, przypomnijmy, mamy zastosowany symbol Pochhammera $x^{\overline{n}}$. Wzór ten wynika z alternatywnej definicji liczb r -Stirlinga pierwszego rodzaju, mianowicie:

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r =$ sumie wszystkich możliwych iloczynów dokładnie $(n-k)$ różnych liczb naturalnych spośród liczb $r, r+1, \dots, n-1$.

Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_2 &= \sum_{k=2}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-2)(n+1), \\ \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_3 &= \sum_{k=3}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-3)(n+2) \\ &= A055998(n-2), \\ \begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix}_2 &= A001701(n-2), \quad n = 4, 5, \dots, \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (5) możemy skonstruować trójkąt liczb r -Stirlinga pierwszego rodzaju:

			$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_r$					
			$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_r$		$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_r$			
		$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_r$		$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_r$		$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}_r$		
	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_r$		$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_r$		$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_r$		$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_r$	

Rozpatrzmy przypadek dla $r=2$, czyli:

0									
0	0								
0	0	1							
0	0	2	1						
0	0	6	5	1					
0	0	24	26	9	1				
0	0	120	154	71	14	1			
0	0	720	1044	580	155	20	1		
0	0

Teraz sumując wzdłuż antyprzekątnych w powyższym trójkącie dostajemy:

0 + 0 = 0,
0 + 0 = 0,
0 + 0 + 1 = 1,
0 + 0 + 2 = 2,
6 + 1 = 7,
24 + 5 = 29,
120 + 26 + 1 = 147,
720 + 154 + 9 = 883,
itd.

to jest otrzymujemy ciąg liczb naturalnych, którego nie ma w OEIS! Mamy:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0}_2 + \binom{n-1}{1}_2 + \binom{n-2}{2}_2 + \dots + \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 2m, \\ \frac{1}{2}(m-1)(m+2), & \text{gdy } n = 2m+1, \end{cases} \\ = A000001(n), \end{aligned}$$

dla każdego $n = 2, 3, \dots$. Napis $A000001(n)$ ze zbiorami pustymi jest przyjętą przez nas notacją ciągów nie zamieszczonych dotąd w OEIS.

Sprawdziliśmy numerycznie (choć na przesłankach poddyktowanych szacowaniem algebraicznym), że dla $5 \leq n \leq 500$ ciąg ten spełnia następujące nierówności:

$$\frac{(n-2)!}{n} < A000001(n) < \frac{(n-2)!}{2}.$$

Dalej skonstruujemy analogiczny trójkąt dla przypadku gdy $r = 3$. Mamy zatem:

0									
0	0								
0	0	0							
0	0	0	1						
0	0	0	3	1					
0	0	0	12	7	1				
0	0	0	60	47	12	1			
0	0	0	360	342	119	18	1		
0	0	0	2520	2754	1175	245	25	1	
0	0	0	20160	24552	12154	3135	445	33	1
0	0	0

Sumując wzdłuż antyprzekątnych w powyższym trójkącie dostajemy:

- 0
- 0 + 0 = 0,
- 0 + 0 + 0 = 0,
- 0 + 0 + 0 + 1 = 1,
- 0 + 0 + 0 + 3 = 3,
- 12 + 1 = 13,
- 60 + 7 = 67,
- 360 + 47 + 1 = 408,
- itd.

Otrzymany ciąg liczb naturalnych również nie znajduje się w OEIS. Mamy:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0}_3 + \binom{n-1}{1}_3 + \binom{n-2}{2}_3 + \dots + \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 2m, \\ \frac{1}{2}(m-2)(m+3), & \text{gdy } n = 2m+1 \end{cases} \\ = A000002(n), \end{aligned}$$

dla każdego $n = 3, 4, \dots$

Sprawdziliśmy numerycznie (choć na przesłankach poddyktowanych szacowaniem algebraicznym), że ciąg ten spełnia dla $7 \leq n \leq 500$ następujące nierówności:

$$(n-5)! < A000002(n) < (n-4)!$$

Uwaga 3.1: W przypadku liczb r -Stirlinga liczby na danym poziomie n stanowią współczynniki rozwinięcia w danej bazie liczbowej b liczby $\prod_{k=r}^{n-1} (bk+1)$ (przy założeniu, że wszystkie współczynniki na poziomie n są $\leq b$), co wynika ze wzoru (7) (analogicznie jak w poprzednim przypadku).

IV. TRÓJKĄTY DLA POTĘG LICZB STIRLINGA ORAZ WSPÓŁCZYNNIKÓW DWUMIANOWYCH

Własności klasycznego trójkąta Pascala są przedstawione w [7]. Przyjrzyjmy się trójkątom Pascala dla potęg współczynników dwumianowych, na przykład dla kwadratów współczynników dwumianowych otrzymamy:

			$\binom{0}{0}^2$			
			$\binom{1}{0}^2$		$\binom{1}{1}^2$	
		$\binom{2}{0}^2$		$\binom{2}{1}^2$	$\binom{2}{2}^2$	
	$\binom{3}{0}^2$		$\binom{3}{1}^2$		$\binom{3}{2}^2$	$\binom{3}{3}^2$
...

lub jawnie:

1							
1	1						
1	4	1					
1	9	9	1				
1	16	36	16	1			
1	25	100	100	25	1		
1	36	225	400	225	36	1	
1

Sumując wzdłuż antyprzekątnych znajdujemy:

- 1,
- 1 + 4 = 5,
- 1 + 9 + 1 = 11,
- 1 + 16 + 9 = 26,
- 1 + 25 + 36 + 1 = 63,
- 1 + 36 + 100 + 16 = 153,
- itd.

Jest to ciąg o numerze A051286 z encyklopedii Sloane'a OEIS. Innymi słowy mamy:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0}^2 + \binom{n-1}{1}^2 + \binom{n-2}{2}^2 + \dots + \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 2m, \\ (m+1)^2, & \text{gdy } n = 2m+1, \end{cases} \\ = A051286(n). \end{aligned}$$

Sumując wzdłuż antyprzekątnych w analogicznym trójkącie dla sześciątów współczynników dwumianowych otrzymujemy 1, 2, 9, 29, 92, 343, 1281, 4720, ..., czyli ciąg o numerze A181545 z encyklopedii Sloane'a OEIS, innymi słowy:

$$\binom{n}{0}^3 + \binom{n-1}{1}^3 + \binom{n-2}{2}^3 + \dots + \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 2m, \\ (m+1)^3, & \text{gdy } n = 2m+1, \end{cases}$$

$$= A181545(n).$$

Teraz rozpatrzmy analogiczne trójkąty dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju. Na początek trójkąt dla kwadratów tych liczb.

1						
0	1					
0	1	1				
0	4	9	1			
0	36	121	36	1		
0	576	2500	1225	100	1	
0	14400	75076	50625	7225	225	1
0

Wykonując sumowanie po antyprzekątnych jak w przypadkach poprzednich trójkątów liczbowych otrzymujemy ciąg:

$$\begin{aligned} 0 + 1 &= 1, \\ 0 + 1 &= 1, \\ 4 + 1 &= 5, \\ 36 + 9 &= 45, \\ 576 + 121 + 1 &= 698, \\ 14400 + 2500 + 36 &= 16936, \\ \text{itd.} \end{aligned}$$

czyli ciąg, którego nie ma w OEIS:

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n-1}{1}^2 + \binom{n-2}{2}^2 + \dots + \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 2r, \\ ((r+1)!)^2, & \text{gdy } n = 2r+1, \end{cases}$$

$$= A000003(n),$$

dla każdego $n = 1, 2, \dots$

Ponadto sprawdziliśmy numerycznie, że dla $4 \leq n \leq 500$ ciąg ten spełnia nierówność:

$$\frac{n!}{5} < A000003(n) < \left(\frac{n!}{5}\right)^2.$$

Z kolei w trójkącie Pascala dla $\binom{n}{k}^3$ sumując wzdłuż antyprzekątnych otrzymujemy ciąg:

$$\begin{aligned} 0 + 1 &= 1, \\ 0 + 1 &= 1, \\ 8 + 1 &= 9, \\ 216 + 27 &= 243, \\ 13824 + 1331 + 1 &= 15156, \\ \text{itd.} \end{aligned}$$

czyli:

$$\binom{n}{0}^3 + \binom{n-1}{1}^3 + \binom{n-2}{2}^3 + \dots + \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 2r, \\ ((r+1)!)^3, & \text{gdy } n = 2r+1, \end{cases}$$

$$= A000004(n),$$

którego również nie ma w OEIS.

Jak poprzednio sprawdziliśmy numerycznie, że dla $4 \leq n \leq 500$ ciąg ten spełnia nierówność:

$$\frac{n!}{3} < A000004(n) < \left(\frac{n!}{3}\right)^3.$$

V. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono szereg elementarnych własności trójkątów liczbowych związanych z liczbami Stirlinga oraz liczbami k-Fibonacci. Powiązано dyskutowane ciągi z ciągami znajdującymi się w OEIS. Otrzymane wyniki podsumowują pewien poziom badań. W przyszłości zamierzamy odnieść się do tych trójkątów liczbowych od strony algebraicznej m. in. tak jak autorzy prac [2] uczynili to w stosunku do klasycznego trójkąta Pascala.

Przedstawiony artykuł został zaprezentowany na Konferencji Symposium for Young Scientists in Technology, Engineering and Mathematics (SYSTEM 2017) w Kownie na Litwie w dniu 28.04.2017r. Zamieszczona tutaj praca została przetłumaczona na język polski i uzupełniona o pewne istotne fakty. Oryginalna praca dostępna jest online: <http://ceur-ws.org/Vol-1853/p07.pdf>.

LITERATURA

- [1] A. Z. Broder, *The r-Stirling numbers*, Discrete Math. **49** (1984), 241-259.
- [2] G.S. Call, D.J. Velleman, *Pascal's matrices*, Amer. Math. Monthly **100** No. 4 (1993), 372-376.
- [3] S. Falcon, *On the complex k-Fibonacci numbers*, Cogent Mathematics (2016), 3:1201944
- [4] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.
- [5] R.P. Grimaldi, *Fibonacci and Catalan Numbers*, Wiley, 2012
- [6] R. Grzymkowski, R. Witula, *Complex functions and Laplace transformations - examples and exercises*, Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego (PKJS), Gliwice 2010.
- [7] R. Hoshino, *Riveting Properties of Pascal's Triangle*, Canadian Mathematical Society, Crux Mathematicorum, **24**(March), 1998.
- [8] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York 2001.
- [9] A.Sofa, *Finite sums in Pascal's triangle*, The Fibonacci Quarterly 50 No. 4 (2012), 337-345
- [10] T. Wright, *Pascal's triangle gets its genes from Stirling numbers of the first kind*, College Math. J. **26** No. 5 (1995), 368-371.