Konkurs zadaniowy z okazji X rocznicy istnienia Koła „Trysektor”.

Następujące propozycje zadań uwzględniają cztery kategorie wiekowe i „wagowe”, przy czym „waga” odnosi się do kategorii niezależnie od wieku, ale nade wszystko od stanu umysłu!?

NAJMŁODSI

1° Uzasadnij, że kwadrat o boku równym a można pokryć pięcioma kołami o średnicach równych a. Czy do tego celu wystarczą tylko cztery takie koła? Wyjaśnij przy jakim dodatkowym warunku koło o promieniu równym a można pokryć czterema kwadratami o boku równym a.

2° Wyjaśnij w jakimi przedsięwzięciu Archimedes pomagał Eratostenesowi? Proponujemy rozwinąć ten temat także wspomagając się ilustracją graficzną.

3° Dane są liczby pierwsze p, q, r, s, t spełniające warunki: liczby $p+q$, $p+q+r$, $p+q+r+s$ są liczbami pierwszymi oraz $p+q+r+s+t = 22$. Wyznacz r oraz s i podaj wszystkie możliwe wartości p, q oraz t.

4° Uzasadnij, że każda liczba naturalna n, $100 \leqslant n \leqslant 200$, może być zapisana w postaci:

$$n = 11k + 13l,$$

gdzie k, l to pewne liczby całkowite. Udowodnij, że w szczególności wynika stąd, iż jeśli k, l są liczbami całkowitymi, dla których mamy:

$$100 = 11k + 13l,$$

to:

$$1000 = 11(100 - k) - 13l.$$

5° (a) Pięć jabłek jednakowej wielkości należy podzielić na możliwie najmniejszą liczbę cząstek i rozdzielić na osiem tej samej masy porcji. Wyjaśnij, jak to zrobić.

(b) Tym razem chcemy 13 jabłek jednakowej wielkości rozdzielić na 42 porcje tej samej masy. Podział jabłek na cząstki nie powinien przekroczyć 7 cząstek na każde jabłko. Wyjaśnij, jak to wykonać.

UCZNIOWIE

1° Omów schody archanioła Gabriela.

2° (a) Skonstruuj złoty podział danego odcinka (przy użyciu jedynie cyrkla i linijki).

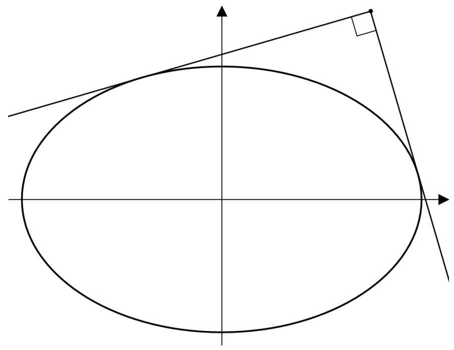
(b) Niech φ oznacza złotą proporcję. Skonstruuj (jak w podpunkcie (a) jedynie przy użyciu cyrkla i linijki) odcinki o długości $\sqrt[2^n]{\varphi}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

(c) Jaki związek ze złotą proporcją φ mają rozwiązania $(x_0, y_0, z_0) \neq (-1, -1, -1)$ następującego układu równań (w zbiorze liczb rzeczywistych):

$$\begin{cases} x^3 - 2y = 1, \\ y^3 - 2z = 1, \\ z^3 - 2x = 1. \end{cases}$$

3° Na okrągłej tacy znajduje się n szklanek z sokiem pomarańczowym o masie m_k dla k-tej szklanki, gdzie $k = 1, \ldots, n$. Uzasadnij, że jeśli taca z tymi szklankami nie jest wyważona (na środku), to na obrzeżu tacy można umieścić jeszcze jedną szklankę z sokiem pomarańczowym o masie M, tak aby otrzymać już wyważoną tacę. Udowodnij, że położenie tej szklanki oraz masa soku pomarańczowego znajdującego się w niej są określone jednoznacznie. Przyjmujemy tutaj, że masy szklanek są pomijalne oraz szklanki mają na tyle małe średnice, że $(n+1)$-szą szklankę zawsze można zmieścić na rozważanej tacy.

4° Dana jest elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ w układzie kartezjańskim Oxy. Udowodnij, że zbiór punktów na płaszczyźnie Oxy, z których wyprowadzone styczne do tej elipsy przecinają się pod kątem prostym, tworzy okrąg dany równaniem $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.



5° (a) Omów związek twierdzenia cosinusów z twierdzeniem Pitagorasa.

(b) Przedstaw chociaż jedną (i to w planimetrii) uogólnioną wersję twierdzenia Pitagorasa.

STUDENCI

1° Przedstaw dowód złożoności piątej liczby Fermata. Omów kryterium Pepina i zademonstruj przykłady zastosowania tego kryterium.

2° Rozważmy „stadko” 101 dalmatyńczyków, z których każde dwa różne mają różną ilość łatek. Załóżmy, że dalmatyńczyki z rozważanego „stadka” numerujemy dowolnie, ale kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 101. Udowodnij, że jeśli τ_k jest równe ilości łatek k-tego dalmatyńczyka dla każdego $k = 1, \ldots, 101$, to istnieje 11-elementowy podciąg $\tau_{k_1}, \tau_{k_2}, \ldots, \tau_{k_{11}}$ taki, że:

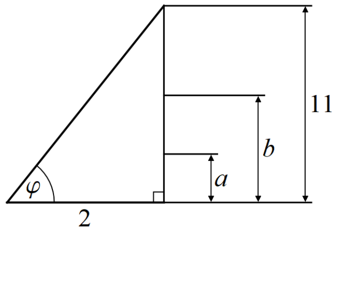
$$\tau_{k_1} < \tau_{k_2} < \ldots < \tau_{k_{11}} \qquad \text{albo} \qquad \tau_{k_1} > \tau_{k_2} > \ldots > \tau_{k_{11}}.$$

3° Omów prawo Benforda. Czy dane statystyczne dotyczące COVID-19 (zachorowalność, zgony) mają związek z prawem Benforda?

4° Wykorzystując fakt, że:

$$\operatorname{Arg}(z^3) = 3 \operatorname{Arg}(z)$$

dla $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Arg}(z^3) = \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$, podaj wartości $a > 0$ oraz $b > 0$ „dokonujące” trysekcji kąta φ z poniższego rysunku.



5° Przedstaw liczbę π w anegdocie i na wesoło, ale oryginalnie!

Kategoria OPEN

1° Omów, historycznie i technicznie, wzory na pole czworokąta (przykładowo wzór Brahmagupty).

2° Który z prezydentów USA opublikował dowód twierdzenia Pitagorasa? Przedstaw ten dowód. Zaproponuj własny dowód twierdzenia Pitagorasa lub przynajmniej swój własny akcent na ten temat.

3° Nazwiska znanych matematyków można spotkać w dziełach popkultury, literatury czy nawet w nazwach „ciastek". Wymień znane Ci przypadki takich osób (autorzy książek, graficy, malarze oraz twórcy innych dzieł kultury). Wyjaśnij ich rodowód oraz wpływ na popularyzację matematyki.

4° Na czym polega tzw. „trik Gaussa" dla liczb zespolonych? Wyjaśnij różnorodne zastosowania tego „triku" – przede wszystkim w teorii obliczeń.